Geometrische Folge

$$\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$$

Es gilt: $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$ als $n \to \infty$

Beweis:

? $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0 \Big\}$ (x)

$$|q^n - 0| < \varepsilon \quad ?$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebige, feste Zahl. Wir suchen n_0 so dass (x) gilt; d. h.

$$|q^n| < \varepsilon \iff$$

$$-\varepsilon < q^n < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

sei $\tilde{n}_0 \in \mathbb{R}$: $|q|^{\tilde{n}_0} = \varepsilon/2$

dann $\tilde{n}_0 = \log_{|q|} \varepsilon/2$; wir suchen eine natürliche Zahl $\rightarrow$ daher

$$n_0 = \lceil \tilde{n}_0 \rceil$$
$$n_0 = \lceil \log_{|q|} \varepsilon/2 \rceil$$

Weil $|q|<1$, es gilt

$$-\varepsilon < q^n < q^{n_0} < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

Wir haben gezeigt:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = \lceil \log_{|q|} \varepsilon/2 \rceil$, so dass

$\forall n \geq n_0 \qquad |q^n - 0| < \varepsilon$

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ QED.

Weiterhin gilt $q=1$: $\lim q^n = 1$,

$|q|>1$ $\lim q^n = \pm\infty$.
