Mathematik für NTW.

Inhalt:

1) Zahlen und Funktionen
2) Differentiation / Ableitung
3) Integralrechnung
   und Differentialgleichungen

Galileo Galilei:

„Mathematik ist die
Sprache der Natur"

1. Zahlen und Funktionen

1.1 Reelle Zahlen

$\mathbb{R}$ ... Menge von rellen Zahlen

- Operation mit reellen Zahlen:

Addition +

Multiplikation ·

Eigenschaften / Regeln → Gesetze
Rechengesetze

seien $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- Kommutativgesetz + $\quad a+b=b+a$
- Assoziativgesetz + $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$
- Null → neutrales Element + $\quad a+0=a$
- ∃ von inversen Element + $\quad a+(-a)=0$

- Kommutativgesetz · $\quad a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz · $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Eins → neutrales Element · $\quad 1 \cdot a = a$
- ∃ von inversen Element · $\quad a \cdot a^{-1} = 1$

- Distributivgesetz $\quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\boxed{a - b := a + (-b)}$$

Subtraktion - ist die Addition eines inversen Elements der Addition

$$\boxed{a/b := a \cdot b^{-1}}$$

Division / ist die Multiplikation mit dem inversen Element der Multiplikation

Potenzen $\quad a^{\pm n} := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Mal}}$

$a > 0,\ a \in R$
$n \ldots$ ganze Zahl $\quad a^{-n} := \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n-\text{Mal}}$

Wurzeln $\quad a^{1/n}$ ist die (positive) Lösung von $x^n = a$

Potenzregeln

$a > 0$ $\qquad (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m =: a^{m/n}$

Beweis:

Sei $\boxed{c := (a^{1/n})^m}$, dann gilt

$$c^{1/m} = a^{1/n} \quad / \ (\ )^{m \cdot n}$$

$$(c^{1/m})^{m \cdot n} = (a^{1/n})^{m \cdot n}$$

$$c^{1/m \cdot m \cdot n} = a^{1/n \cdot m \cdot n}$$

$$c^n = a^m$$

$$\Rightarrow \boxed{c := (a^m)^{1/n}}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

QED

- Reele Zahlen können <u>angeordnet</u> werden:

$a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$

- <u>Eigenschaften</u> der Relation "$<$"
  - Transitivität $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$
  - Monotonie von $+$ $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
  - Monotonie von $\cdot$ $a < b,\ c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b \}$$

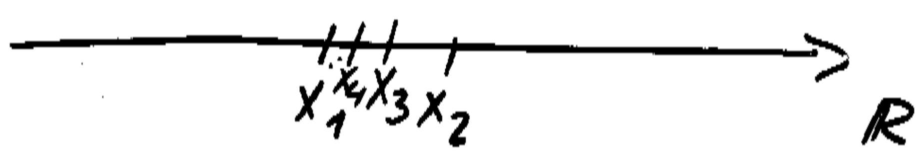
$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R};\ a < x < b \}$$

$$\mathbb{R}^+ := \{ x \in \mathbb{R};\ x > 0 \} = (0, \infty)$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{ x \in \mathbb{R};\ x \geq 0 \} = [0, \infty)$$

- Vollständigkeitsaxiom: "Reelle Zahlen sind voll."

"Zwischen den rationalen Zahlen, d.h. p/q ; $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, schließt sich die Lücke mit anderen Zahlen. Diese sind die so-genannten irationalen Zahlen."



$$\forall \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\; \exists \, x_3 \in \mathbb{R} \; : \; x_1 \leq x_3 < x_2$$
$$x_1 < x_2$$

• Supremum: eine Zahl, die kleinste obere Schranke, von der menge ist.

M ... nichtleere menge in $\mathbb{R}$; $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$

$m \in \mathbb{R}$ ist ein Supremum von M, falls

$$\boxed{m = \sup M}$$

i) $\forall x \in M$ gilt $x \leq m$

ii) $\forall \tilde{m} \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in M: x \leq \tilde{m}$,

gilt $m \leq \tilde{m}$

i) m ist eine Obere Schranke

ii) wenn auch $\tilde{m}$ eine obere Schranke ist, dann ist $\tilde{m}$ größer als m.

• Infimum: ist die größte untere Schrank

$$\boxed{k = \inf M}$$

i) $\forall x \in M$ gilt $x \geq k$

ii) $\forall \tilde{k} \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in M: x \geq \tilde{k}$,

gilt $\tilde{k} \leq k$

Bemerkung:

- falls $\sup M \in M$, dann $\sup M = \max M$

die größte Zahl in M

<u>Analog:</u> $\inf M \in M$, dann $\inf M = \min M$

die kleinste Zahl in M

• <u>Betrag</u> ist die Funktion um den Abstand zwischen 2 Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ zu bestimmen $|b-a|$

<u>Definition:</u>

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0. \\ -a & a < 0. \end{cases}$$

<u>Rechenregel</u>

i) $\forall a \neq 0 \quad |a| > 0$

ii) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

iii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Δ-Ungl.)

1.2 Komplexe Zahlen

Bsp.

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

Lösung:
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{-2} \quad :)$$

Oops! $\sqrt{-2}$ ist in den reellen Zahlen nicht definiert!

Ausweg: O.K. $\Rightarrow$ "let us make them larger"

Wir „erfinden" eine neue Zahl

$$\boxed{\sqrt{-1} =: i}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Zurück zum Bsp:

$$\boxed{x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i}$$

✓

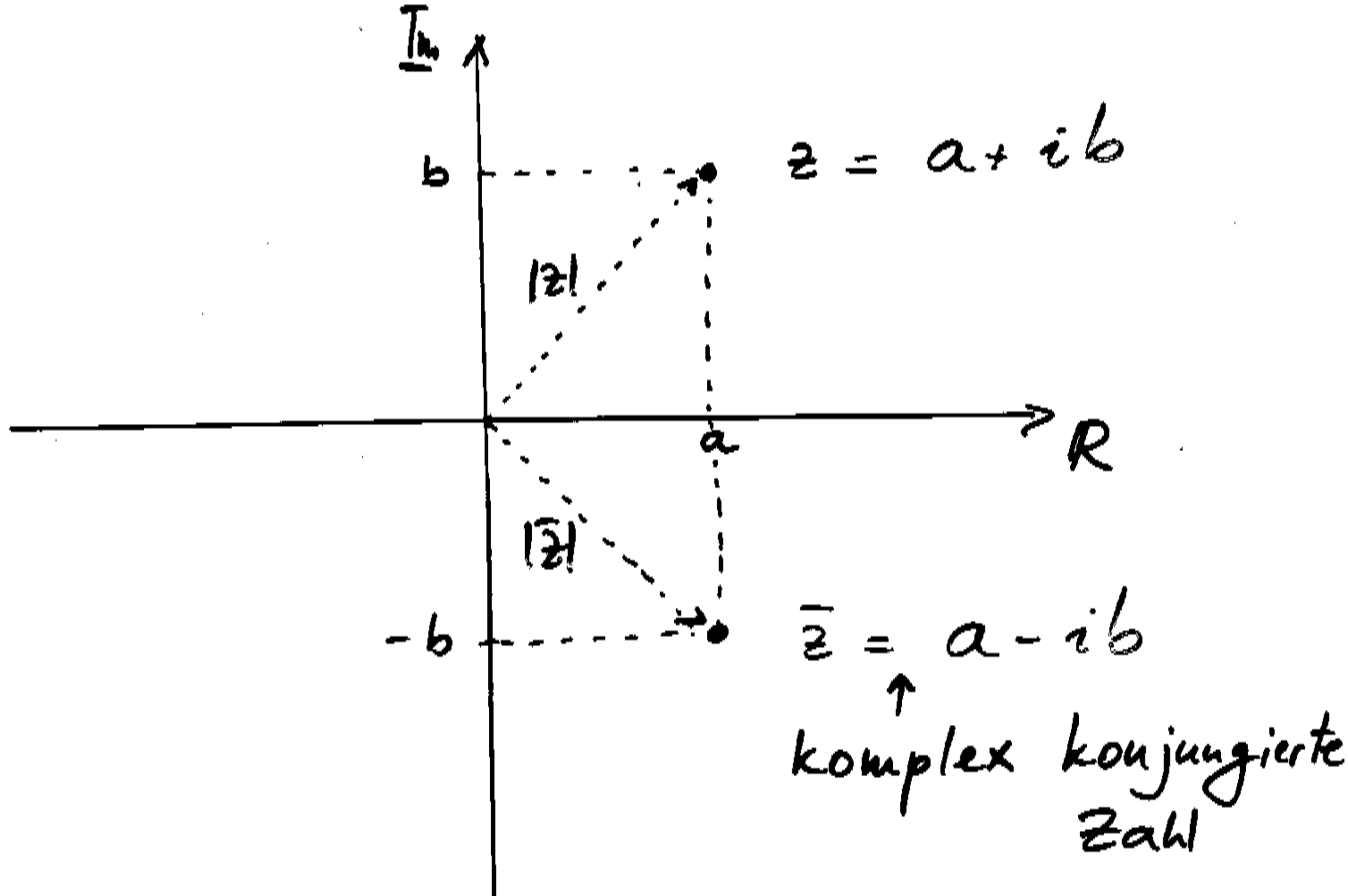
Komplexe Zahlen ... $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib; \quad a, b \in \mathbb{R} \}$$

$$z = a + i\underline{b}$$ ← Imaginärteil

↑ Reelle Teil (<u>Realteil</u>)

$$\mathrm{Re}\, z = a \qquad \mathrm{Im}\, z = b$$



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\bar{z}| = \ ?$$

Rechengesetze für komplexe Zahlen:

1. Addition ("Apfel mit Apfel, Banane mit Banane")

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

2. Multiplikation ("Einfach ausmultiplizieren")

$$(a+ib)\cdot(c+id) =$$

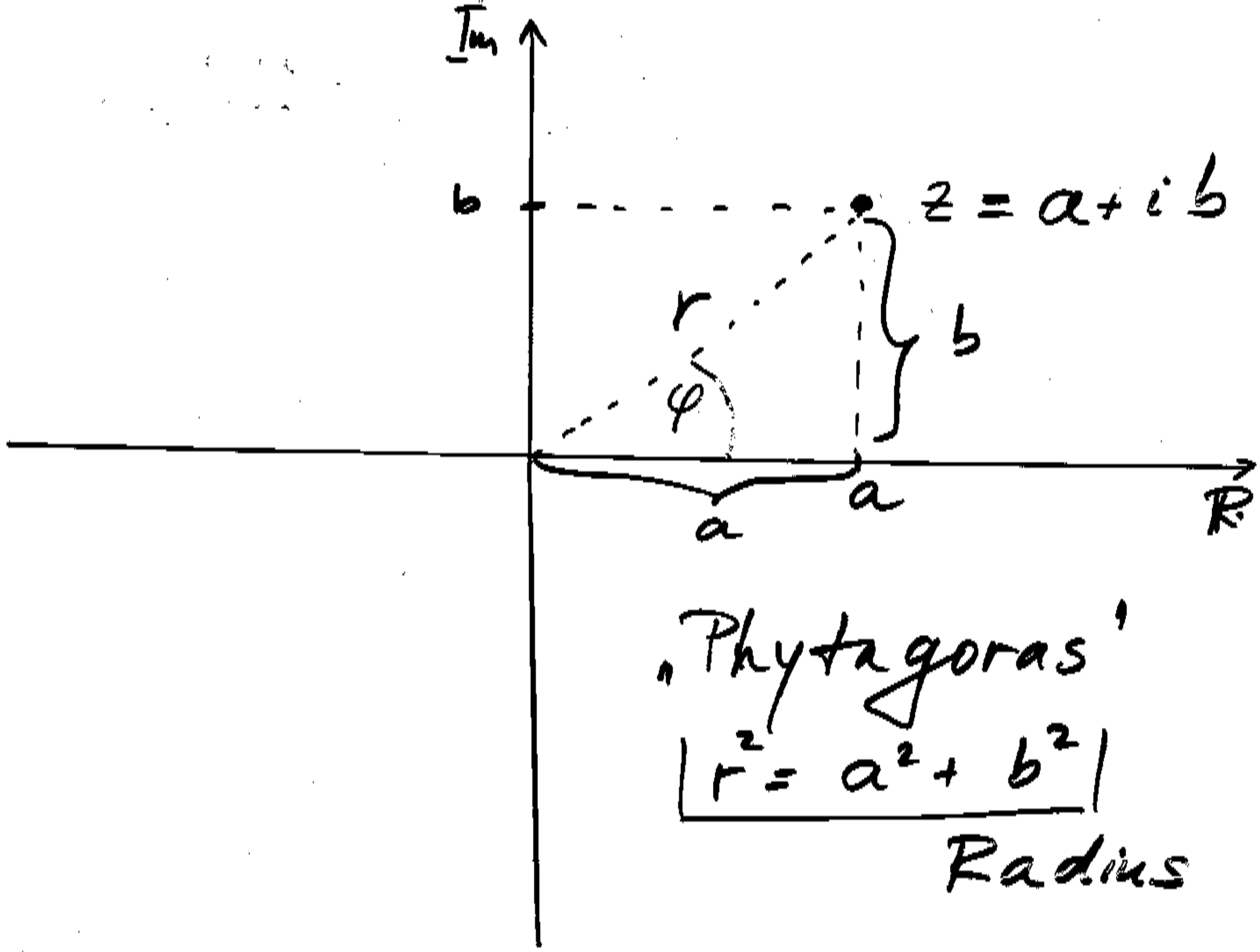
$$a\cdot c + i\,a\cdot d + i\,b\cdot c + i^2 b\cdot d =$$

$$= \left(a\cdot c + \overset{=-1}{i^2}\,b\cdot d\right) + i\,(ad+bc)$$

$$= (ac - b\cdot d) + i\,(ad+bc)$$

→ komplexe Zahlen lassen sich nicht anordnen!

- <u>Polarkoordinatendarstellung von komplexen Zahlen</u>



„Phytagoras"

$$\boxed{r^2 = a^2 + b^2}$$

Radius

$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z$

$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$

Polardarstelung: $\quad z = (r, \varphi)$

$$\boxed{z = r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi}$$

- Formel von Moivre

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\varphi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{n}\varphi\right)\right)$$

- Wurzel von einer komplexen Zahl

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Gesucht wird ξ, sodass

$$\sqrt[n]{z} = \xi.$$

D.h. $\xi^n = z$.

Es gibt n- Lösungen im $\mathbb{C}$:

$$\xi_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k\right);$$

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}; \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$