Stabilitätsanalyse von numerischen Verfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science
des Instituts für Mathematik, Fachbereich 08,
der Johannes Gutenberg Universität Mainz

vorgelegt von

Name: Strasser   Vorname: Paul Jonathan

Geb. am: 19. Juni 1986   in: Wiesbaden

Betreuerin: Prof. Dr. Mária Lukáčová-Medvid'ová

Abgabetermin: 16. Juni 2011

Zusammenfassung

Thema dieser Arbeit ist die Stabilitätsanalyse von numerischen Verfahren erster Ordnung für das gekoppelte Fluid-Struktur-Wechselwirkungs-System.
Zu Anfang der Arbeit wird ein Überblick über benötigte Grundlagen, insbesondere die *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*-Methode gegeben.
Im Anschluss werden aufeinander aufbauend Stabilitätsanalysen von einer stetigen und von diskretisierten Formen eines physikalischen Erhaltungsgesetzes, welches auf einem sich bewegenden Gebiet definiert ist, durchgeführt.
Als Textvorlage dient hierbei das erste Kapitel des Werkes „Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to Haemodynamics“ [1] von Fabio Nobile.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Grundlagen 2
2.1 (Un)Gleichungen 2
2.2 ALE-Methode 3

3 Ein Lineares Advektions-Diffusions-Problem 5
3.1 Stabilitätsanalyse der Differentialgleichung in ALE-Form . . . 5

4 Approximation der erhaltenden Formulierung 9
4.1 Finite-Elemente-Methode 9
4.2 Finite-Elemente-Approximation 10
4.3 Geometric Conservation Laws 11
4.4 Ein Stabilitätsergebnis für das implizite Euler-Verfahren angewandt auf die erhaltende Formulierung 12

5 Approximation der nicht erhaltenden Formulierung 14
5.1 Stabilitätsanalyse des semi-diskreten Schemas 15
5.2 Stabilitätsanalyse für das implizite Euler-Verfahren 16

6 Résumé 20

Literaturverzeichnis 21

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden aufeinander aufbauend Stabilitätsanalysen von physikalischen Erhaltungsgesetzen, welche auf sich bewegenden Gebieten definiert sind, durchgeführt. Es wird damit begonnen ein allgemeines Erhaltungsgesetz dieser Art in *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*(ALE)-Form zu bringen. Daraufhin wird von einer speziellen Version dieses Erhaltungsgesetzes die erste Stabilitätsanalyse durchgeführt, deren Methoden und Ergebnisse den darauf folgenden Stabilitätsanalysen dienlich sind. Die darauf folgenden Analysen werden von zwei verschiedenen Integralformen des speziellen Gesetzes durchgeführt, der nicht erhaltenden und der erhaltenden Formulierung, jeweils mit der *Galerkin-Finite-Element-Method* (GFEM) im Raum diskretisiert. Zum Schluss werden Stabilitätsanalysen der mit dem *impliziten Euler-Verfahren* approximierten Zeitintegrale der beiden Formulierungen durchgeführt.
Stabilität wird hierbei immer durch Beschränktheit der geeigneten Normen gezeigt. Bei den dazu benötigten Abschätzungen verwenden wir einige (Un)-Gleichungen, die in Kapitel 2.1 aufgelistet werden. Für weitere Informationen bezüglich dieser (Un)Gleichungen siehe z.B. [2] und [3].
Im Zusammenhang der Stabilitätsanalysen wird auch kurz auf die *Geometric Conservation Laws* (GCL) der analysierten Erhaltungsgesetze eingegangen.
Die mathematische Herleitung der ALE-Methode ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. In Kapitel 2.2 findet jedoch eine Einführung der wichtigsten Formeln und Begriffe statt. Weitere Informationen bezüglich der ALE-Methode sind z.B. in [1, Kapitel 1, Abschnitt 0-3] „Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to Haemodynamics“ von Fabio Nobile zu finden.

2 Grundlagen

2.1 (Un)Gleichungen

Vgl. [2, S. 5]: Mit $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen und schreiben $\mathbb{R}^d = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) : \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, d\}$
Mit Ω bezeichnen wir ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$, dessen Rand $\partial\Omega$ ist.
Seien u, v skalare Funktionen und $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_d)$ eine vektorwertige Funktion von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator durch
$\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_d}), \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$ und $\Delta v = \nabla \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.

Greensche Formel [2, vgl. S. 6]

Seien $\mathbf{w}, v, u \in H^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot n v ds - \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{w} v d\mathbf{x}, \tag{1}$$

wobei $n = (n_1, \ldots, n_d)$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ ist.
Wenden wir Sie mit $\mathbf{w} = \nabla u$ an, wird die Formel zu

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} n \cdot \nabla u v ds - \int_\Omega \Delta u v d\mathbf{x}. \tag{2}$$

Hölder-Ungleichung vgl.[3]

Für $\quad 1 \leq p, q \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad f \in L^p(\Omega), u \in L^q(\Omega) \quad$ gilt:

$$\|fu\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|u\|_{L_q(\Omega)}. \tag{3}$$

Poincaré-Ungleichung [2, vgl. S. 251]

Es existiert eine Konstante $C = C(\Omega)$ mit

$$\|v\| \leq C \|\nabla v\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Grönwall-Lemma [2, vgl. S. 114]

Seien a, b nichtnegative Konstanten, φ eine nichtnegative, stetige Funktion. Dann gilt für $t > 0$:

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s) ds \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) \leq a e^{bt}. \tag{5}$$

2.2 ALE-Methode

Die ALE-Methode basiert auf der Einführung einer homöomorphen ALE-Abbildung $\mathcal{A}_t$ von einem Referenzgebiet Ω_0 auf das aktuelle, sich bewegende Gebiet Ω_t:

$$\mathcal{A}_t : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \Omega_t \subset \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x}(\mathbf{Y}, t) = A_t(\mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{Y} \in \Omega_0, \quad t \in [t_0, T] =: I, \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{Y}$ die *ALE-Koordinate* und $\mathbf{x}$ die *Eulersche Koordinate.*
Führen wir nun die *Gebietsgeschwindigkeit* $\mathbf{w} = \frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t}$ ein, können wir ein allgemeines Erhaltungsgesetz der folgenden Art

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) = f, \tag{7}$$

definiert auf einem sich bewegenden Gebiet Ω_t, mit Hilfe der Bezugsformel der partiellen Zeitableitungen von u im Referenz-, sowie im aktuellen Gebiet

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u \tag{8}$$

in ALE-Form schreiben:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u = f, \quad \text{in } \Omega_t. \tag{9}$$

Bis hierhin vgl. [1, S. 1, 2, 12].
Mit ALE-Form bezeichnen wir Gleichungen, in denen Terme mit Zeitableitungen auf dem Referenzgebiet, sowie Terme mit räumlichen Ableitungen auf dem aktuellen Gebiet vorkommen.
Als Vorarbeit für Kapitel 3 wird Gleichung (9) erweitert und mit Hilfe der Produktregel der Divergenz folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) - \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u &= \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) \underline{- \mathbf{w} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u - u \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}} + u \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} &= \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) \underline{- \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w} u)} + u \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} &= \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{F}(u) - (\mathbf{w} u)] + u \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} &= f.
\end{aligned} \tag{10}$$

Wir zerlegen den Stromvektor $\mathbf{F}(u)$ in

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{F}_e(u) + \mathbf{F}_v(u), \tag{11}$$

wobei $\mathbf{F}_e(u)$ der konvektive und $\mathbf{F}_v(u)$ der diffusive Part ist. [1, vgl. S. 15]

Wir benutzen den Hilbertraum $H^1(\Omega)$, der dem Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ entspricht und für den gilt:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ \forall i \in \{1, \dots, d\}\} \tag{12}$$

und definieren $H_0^1(\Omega)$ als den Unterraum von $H^1(\Omega)$ mit Spur Null auf $\partial\Omega$. Weiterhin benötigen wir eine Gewichtsfunktion ψ aus dem Raum der Gewichtsfunktionen in der aktuellen Konfiguration

$$\mathcal{X}(\Omega_t) = \{\psi \colon \Omega_t \times I \to \mathbb{R}, \ \ \psi \circ \mathcal{A}_t = \hat{\psi}, \ \ \hat{\psi} \in \mathcal{X}(\Omega_0)\}, \tag{13}$$

wobei $\mathcal{X}(\Omega_0) = \{\hat{\psi} \colon \Omega_0 \to \mathbb{R}\}$ der Raum der Gewichtsfunktionen auf dem Referenzgebiet ist und $\mathcal{X}(\Omega_t) \subset H^1(\Omega_t)$. [1, vgl. S. 15, 17, 18]

Für Kapitel 4 und 5 benötigen wir folgende Ausdrücke für das räumliche Integral der Zeitableitung von u:
Eine nicht erhaltende schwache Formulierung des Erhaltungsgesetzes in ALE-Form (9):

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} \psi d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \psi(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_e(u) - \mathbf{w}\nabla_{\mathbf{x}} u) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \mathbf{F}_v(u) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_t} f\psi d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in \mathcal{X}(\Omega_t),\end{aligned} \tag{14}$$

sowie eine erhaltende schwache Formulierung des Erhaltungsgesetzes in ALE-Form (10):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \psi u d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \mathbf{F}_v(u) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \psi(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}_e(u) - \mathbf{w}u)) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_t} f\psi d\mathbf{x}, \quad \forall \psi \in \mathcal{X}(\Omega_t).\end{aligned} \tag{15}$$

[1, vgl. S. 15, 16]

3 Ein Lineares Advektions-Diffusions-Problem

Um die Eigenschaften der diskreten Modelle, die wir in Kapitel 4 und 5 bearbeiten, zu analysieren, betrachten wir einen Spezialfall des allgemeinen Erhaltungsgesetzes (7), in dem $\mathbf{F}_e(u) = \beta u$ und $\mathbf{F}_v(u) = -\mu \nabla_{\mathbf{x}} u$ gelten:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(u) &= \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta u - \mu \nabla_{\mathbf{x}} u) &= \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta u) - \mu \Delta_{\mathbf{x}} u &= f \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad t \in I, \qquad (16) \\
u &= u_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad t = t_0, \\
u &= u_D \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega_t, \quad t \in I,
\end{aligned}
$$

wobei β die Konvektionsgeschwindigkeit ist, für die wir annehmen $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta = 0$, d.h. β ist inkompressibel, μ ist eine Konstante für die Diffusion und u_D eine *Dirichlet-Randbedingung*. Wir erachten nur den Fall von homogenen *Dirichlet-Randbedingungen* was bedeutet, dass der Wert der Randbedingung Null ist. In der Differentialgleichung (16) ist u die gesuchte Funktion einer Fluid-Konzentration in dem sich bewegenden Gebiet Ω_t. [1, vgl. S. 25]

3.1 Stabilitätsanalyse der Differentialgleichung in ALE-Form

Wir schreiben nun diese Differentialgleichung des speziellen Erhaltungsgesetzes (16) in ALE-Form und untersuchen Sie auf Stabilität, um die Ergebnisse später auf diskretisierte Varianten zu übertragen.
Wir nehmen formal an, dass die Lösung u regulär genug ist. Der Vollständigkeit halber gehen wir (nur in diesem Abschnitt) von einem generellen konvektiven Feld β mit $\|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta\|_{L_\infty(\Omega_t \times I)} = \gamma < \infty$ aus. [1, vgl. S. 26]
Indem wir $\mathbf{F}_e(u) = \beta u$ und $\mathbf{F}_v(u) = -\mu \nabla_{\mathbf{x}} u$ in unser umgeformtes Erhaltungsgesetz in ALE-Form (10) einsetzen, erhalten wir folgende ALE-Form von (16):

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\beta - \mathbf{w})u] - \mu \Delta_{\mathbf{x}} u + u \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} &= f \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad t \in I \qquad (17) \\
u &= u_0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad t = t_0 \\
u &= 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega_t, \quad t \in I
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren Gleichung (17) mit u und integrieren über Ω_t und erhalten

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{Y}} u d\mathbf{x}}_{\mathbf{1}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\beta - \mathbf{w})u] u d\mathbf{x}}_{\mathbf{2}} \underbrace{-\mu \int_{\Omega_t} \Delta_{\mathbf{x}} u u d\mathbf{x}}_{\mathbf{3}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} u^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}}_{\mathbf{4}}$$
$$= \int_{\Omega_t} f u d\mathbf{x}, \quad (18)$$

wobei wir die Terme **1**-**3** im Folgenden getrennt umformen.
Mit dem *Reynolds'schen Transportsatz* erhalten wir aus Term **1**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{Y}} u d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \frac{\partial u^2}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{Y}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2_{L_2(\Omega_t)} \underline{- \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Auf Term **3** wenden wir die *Greensche Formel* (2) an und erhalten

$$\begin{aligned} -\mu \int_{\Omega_t} \Delta_{\mathbf{x}} u u d\mathbf{x} &= \mu \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} u \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u d\mathbf{x} - \mu \int_{\partial\Omega_t} n \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u u d\mathbf{x} \\ &= \mu \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_t)} \quad - 0, \end{aligned} \quad (20)$$

da das Integral über den Rand dank der homogenen Randbedingungen null ist.

Bei Term **2** helfen uns ebenfalls die homogenen Randbedingungen, die Umformung zu vereinfachen und wir wenden hier die *Greensche Formel* (1) an:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\beta - \mathbf{w})u] u d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}) u^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u u d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}) u^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u^2 d\mathbf{x} \\ \stackrel{\textit{Greensche Formel } (1)}{=} & \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}) u^2 d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}) u^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}) u^2 n d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}) u^2 d\mathbf{x} \quad + 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta d\mathbf{x} \underline{- \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Wir setzen nun die Gleichungen (19), (20) und (21) in Gleichung (18) ein, wobei sich die unterstrichenen Terme von (19) und (21) mit Term **4** aufheben.

Vgl. [1, S. 26, 27]: Dank unseren Umformungen von Term **1** und **2** haben sich also alle von der Gebietsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ abhängende Terme weggekürzt und wir erhalten

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu\|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \int_{\Omega_t} fu d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} u^2 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta d\mathbf{x}. \tag{22}$$

Gleichung (22) mit 2 multipliziert und über Zeit von t_0 bis t integriert bekommen wir

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + 2\mu\int_{t_0}^t \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds = \|u(t_0)\|^2_{L_2(\Omega_{t_0})} + \underbrace{2\int_{t_0}^t\int_{\Omega_s} fu d\mathbf{x} ds}_{\mathbf{5}} \underbrace{- \int_{t_0}^t\int_{\Omega_s} u^2\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta d\mathbf{x} ds}_{\mathbf{6}}, \tag{23}$$

wovon wir nun Term **5** und **6** getrennt abschätzen.

Zunächst definieren wir uns ein $\varepsilon^2 = \frac{C_\Omega}{\mu}$, wobei $C_\Omega := \sqrt{C}$ aus der *Poincaré-Ungleichung* (4), und schätzen **5** folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
2\int_{t_0}^t\int_{\Omega_s} fu d\mathbf{x} ds &\leq 2\left|\int_{t_0}^t\int_{\Omega_s} fu d\mathbf{x} ds\right| \\
&\leq 2\int_{t_0}^t\int_{\Omega_s} |fu|\, d\mathbf{x} ds = 2\int_{t_0}^t \|fu\|_{L_1(\Omega_s)} ds \\
\text{\textit{Hölder-Ungleichung} (3)} \quad &\leq 2\int_{t_0}^t \|f\|_{L_2(\Omega_s)}\|u\|_{L_2(\Omega_s)} ds = 2\int_{t_0}^t \varepsilon\|f\|_{L_2(\Omega_s)}\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{L_2(\Omega_s)} ds \\
\left(\forall a,b\in\mathbb{R}^d : ab \leq \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2\right) \quad &\leq 2\int_{t_0}^t \frac{\varepsilon^2}{2}\|f\|^2_{L_2(\Omega_s)} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \\
\text{\textit{Poincaré-Ungleichung} (4)} \quad &\leq \int_{t_0}^t \varepsilon^2\|f\|^2_{L_2(\Omega_s)} + \frac{C_\Omega}{\varepsilon^2}\|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \\
\left(\varepsilon^2 = \tfrac{C_\Omega}{\mu}\right) \quad &= \frac{C_\Omega}{\mu}\int_{t_0}^t \|f\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds + \underline{\mu\int_{t_0}^t \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds.}
\end{aligned} \tag{24}$$

Nun schätzen wir noch Term **6** ab:

$$
\begin{aligned}
-\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_s} u^2\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta d\mathbf{x}ds &\leq \left|\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_s} u^2\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta d\mathbf{x}ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_s}\left|u^2\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta\right| d\mathbf{x}ds = \int_{t_0}^{t}\|u^2\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta\|_{L_1(\Omega_s)}ds \\
\overset{\textit{Hölder-Ungleichung } (3)}{} &\leq \int_{t_0}^{t}\|\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta\|_{L_\infty(\Omega_s)}\|u^2\|_{L_1(\Omega_s)}ds \\
&\leq \|\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta\|_{L_\infty(\Omega_t\times I)}\int_{t_0}^{t}\int_{\Omega_s} u^2 d\mathbf{x}ds \\
\left(\|\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\beta\|_{L_\infty(\Omega_t\times I)}=\gamma\right) &= \gamma\int_{t_0}^{t}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Wir setzen die Ungleichungen (24) und (25) in (23) ein, ziehen den in (24) markierten Term auf beiden Seiten ab und erhalten

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu\int_{t_0}^{t}\|\nabla_{\mathbf{x}}u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds \leq \|u(t_0)\|^2_{L_2(\Omega_{t_0})} + \frac{C_\Omega}{\mu}\int_{t_0}^{t}\|f\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds \\
+ \gamma\int_{t_0}^{t}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Als letzten Schritt führen wir den Beweis des *Grönwall-Lemmas* (5), um den letzten Term aus Ungleichung (26) zu eliminieren.
Da $\|\nabla_{\mathbf{x}}u\|^2_{L_2(\Omega_t)} \geq 0$ und $\mu \geq 0$, ist auch $\mu\int_{t_0}^{t}\|\nabla_{\mathbf{x}}u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds \geq 0$.
Damit können wir aus Ungleichung (26) folgern, dass auch

$$
\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} \leq K + \gamma\int_{t_0}^{t}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds \tag{27}
$$

mit

$$
K = \|u(t_0)\|^2_{L_2(\Omega_{t_0})} + \frac{C_\Omega}{\mu}\int_{t_0}^{t}\|f\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds.
$$

Wir formen Ungleichung (27) um zu

$$
\frac{\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)}}{K + \gamma\int_{t_0}^{t}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds} \leq 1,
$$

multiplizieren mit γ und integrieren über Zeit von t_0 bis t:

$$
\int_{t_0}^{t}\frac{\gamma\|u(s)\|^2_{L_2(\Omega_s)}}{K + \gamma\int_{t_0}^{s}\|u\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}d\tau}ds \leq \gamma\int_{t_0}^{t}1ds,
$$

berechnen die äußeren Integrale:

$$
\ln\left(K + \gamma\int_{t_0}^{t}\|u\|^2_{L_2(\Omega_s)}ds\right) - \ln(K) \leq \gamma t
$$

und erhalten damit

$$K + \gamma \int_{t_0}^{t} \|u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \leq K e^{\gamma t},$$

woraus wir mit Ungleichung (26) den folgenden Stabilitätsausdruck erhalten:

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu \int_{t_0}^{t} \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \leq K e^{\gamma t}. \tag{28}$$

Für $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta = 0$ vereinfacht sich das Ganze zu

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu \int_{t_0}^{t} \|\nabla_{\mathbf{x}} u\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \leq K. \tag{29}$$

In diesem Fall wäre die Anwendung des *Grönwall-Lemmas* überflüssig.
Vgl. [1, S. 27]: Es fällt auf, dass die Stabilitätseigenschaften in unserem stetigen Modell komplett unabhängig von der Gebietsgeschwindigkeit sind. Wir konnten diese im Laufe der Berechnungen eliminieren. Wir werden jedoch sehen, dass dies im diskreten Problemfall nicht immer rekonstruierbar ist.

4 Finite-Elemente-Approximation der erhaltenden Formulierung

4.1 Finite-Elemente-Methode

Wir konstruieren nun mit der *Galerkin-Finite-Element-Method* (GFEM) eine Raumdiskretisierung der Erhaltungsgesetze in erhaltender (15) und in nicht erhaltender Form (14). Zunächst definieren wir eine geeignete diskrete ALE-Abbildung $\mathcal{A}_{h,t}$, welche die Gebiets-Triangulierung durch die GFEM während der Bewegung des Gebiets erhält. [1, vgl. S. 22]
Vgl. [1, S. 23]: Wir übertragen unseren Raum der Gewichtsfunktionen (13) in folgenden diskreten Testfunktionenraum:

$$\mathcal{X}_h(\Omega_{h,t}) = \{\psi_h \colon \Omega_{h,t} \times I \to \mathbb{R}, \quad \psi_h \circ \mathcal{A}_{h,t} = \hat{\psi}_h, \quad \hat{\psi}_h \in \mathcal{X}_h(\Omega_0)\}, \tag{30}$$

wobei $\Omega_{h,t} = \mathcal{A}_{h,t}(\Omega_0)$ eine Approximation von Ω_t ist.
Die Knoten des Finite-Elemente-Gitters bezeichnen wir mit $\mathcal{N}$ und die inneren Knoten, d.h. alle, die nicht auf dem Rand liegen, mit $\mathcal{N}_{int} \subset \mathcal{N}$.
Mit $\{\psi_i, \quad \psi_i \in \mathcal{X}_h(\Omega_{h,t}), \quad i \in \mathcal{N}\}$ führen wir die Menge der Basisfunktionen der Knoten ein, welche eine Basis von $\mathcal{X}_h(\Omega_{h,t})$ bildet. Wir definieren den diskreten Funktionenraum $\mathcal{X}_{0,h}(\Omega_{h,t}) = \mathcal{X}_h(\Omega_{h,t}) \cap H^1_0(\Omega_{h,t})$, für den die Menge $\{\psi_i, \quad i \in \mathcal{N}_{int}\}$ ebenfalls eine Basis bildet.

Schließlich bezeichnen wir mit u_h die numerische Lösung, welche in $\mathcal{X}_h(\Omega_{h,t})$ liegt und die als Linearkombination von Basisfunktionen der Knoten und zeitabhängigen Koeffizienten folgende Form hat:

$$u_h(\mathbf{x},t) = \sum_{j\in\mathcal{N}} \psi_j(\mathbf{x},t)u_j(t). \tag{31}$$

Im Folgenden benutzen wir $\mathcal{X}_{0,h}(\Omega_{h,t})$ als den Testfunktionenraum und bezeichnen der Einfachheit halber die Approximation $\Omega_{h,t}$ wie gewohnt als Ω_t.

4.2 Finite-Elemente-Approximation

Wir setzen in Gleichung (15) die bereits verwendeten konvektiven und diffusiven Terme $\mathbf{F}_e(u) = \beta u$ und $\mathbf{F}_v(u) = -\mu\nabla_{\mathbf{x}}u$ ein und schreiben sie mit Hilfe der eben eingeführten GFEM als semi-diskrete Finite-Elemente-Approximation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\psi_h u_h d\mathbf{x} + \mu\int_{\Omega_t}\nabla_{\mathbf{x}}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}u_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\cdot[(\beta-\mathbf{w}_h)u_h]d\mathbf{x}&\\ = \int_{\Omega_t} f\psi_h d\mathbf{x} \quad \forall\psi_h\in\mathcal{X}_{0,h}(\Omega_t),\quad t\in I,&\end{aligned} \tag{32}$$

mit

$$\begin{aligned}u_h &= u_{Dh} \quad \text{für } \mathbf{x}\in\partial\Omega_t,\quad t\in I,\\ u_h &= u_{0h} \quad \text{für } \mathbf{x}\in\Omega_0,\quad t=t_0,\end{aligned}$$

wobei u_{Dh} und u_{0h} geeignete Finite-Elemente-Approximationen von u_D und u_0 sind. [1, vgl. S. 37]
Wir setzen nun unsere Linearkombination (31) in Gleichung (32) ein und erhalten

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathcal{N}}u_j(t)\int_{\Omega_t}\psi_h\psi_j d\mathbf{x} + \sum_{j\in\mathcal{N}}u_j(t)\mu\int_{\Omega_t}\nabla_{\mathbf{x}}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\psi_j d\mathbf{x}\\ &\qquad + \sum_{j\in\mathcal{N}}u_j(t)\int_{\Omega_t}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\cdot[(\beta-\mathbf{w}_h)\psi_j]d\mathbf{x}\\ &= \frac{d}{dt}\sum_{j\in\mathcal{N}}u_j(t)\int_{\Omega_t}\psi_h\psi_j d\mathbf{x} + \sum_{j\in\mathcal{N}}u_j(t)\Bigg(\int_{\Omega_t}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\beta\psi_j)d\mathbf{x}\\ &\quad + \mu\int_{\Omega_t}\nabla_{\mathbf{x}}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\psi_j d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t}\psi_h\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\mathbf{w}_h\psi_j)d\mathbf{x}\Bigg) = \int_{\Omega_t} f\psi_h d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{33}$$

Setzen wir nun die Testfunktionen ψ_h gleich den Basisfunktionen der Knoten ψ_i und schreiben für jeden Knoten $i\in\mathcal{N}$ beide Seiten der Gleichung (33) jeweils untereinander in einen Vektor, so erhalten wir folgende algebraische Darstellung:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}(t)U) + (\mathbf{H}(t) - \mathbf{A}(t, \mathbf{w}_h))U = \mathbf{F}, \tag{34}$$
$$u_i = u_D \quad \text{für } i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{int},$$

wobei $U = \{u_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ der Vektor der Knotenwerte der diskreten Lösung ist,

$$\mathbf{M}(t) = \left\{ \int_{\Omega_t} \psi_i \psi_j d\mathbf{x} \right\}_{i,j \in \mathcal{N}_{int}}$$

die Massenmatrix und $\mathbf{H}$ und $\mathbf{A}$ definiert sind als

$$\mathbf{H}(t) = \left\{ \int_{\Omega_t} \psi_i \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta \psi_j) d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_i \nabla_{\mathbf{x}} \psi_j d\mathbf{x} \right\}_{i,j \in \mathcal{N}_{int}}$$

und

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{w}_h) = \left\{ \int_{\Omega_t} \psi_i \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{w}_h \psi_j) d\mathbf{x} \right\}_{i,j \in \mathcal{N}_{int}}.$$

Wir haben mit (34) nun ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, welches wir folgendermaßen in Zeit integrieren:

$$\mathbf{M}_{t_{n+1}} U_{n+1} - \mathbf{M}_{t_n} U_n + \mathcal{INT}_1{}_{t_n}^{t_{n+1}}[\mathbf{H}U] - \mathcal{INT}_2{}_{t_n}^{t_{n+1}}[\mathbf{A}U] = \tilde{\mathbf{F}}, \tag{35}$$

wobei $\mathcal{INT}_1$ und $\mathcal{INT}_2$ Quadraturverfahren sind, welche die Terme $\mathbf{H}U$ und $\mathbf{A}U$ in der Zeit integrieren ($\mathcal{I}$ntegrate $\mathcal{N}$umerically in $\mathcal{T}$ime):

$$\mathcal{INT}_1{}_{t_n}^{t_{n+1}}[\mathbf{H}U] \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{H}U dt,$$
$$\mathcal{INT}_2{}_{t_n}^{t_{n+1}}[\mathbf{A}U] \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{A}U dt,$$

wobei das unbekannte U in diesen zwei Termen in impliziten Quadraturverfahren als U_{n+1} und in expliziten als U_n definiert wird.
Von (34) bis hier vgl. [1, S. 37, 38]

4.3 Geometric Conservation Laws

Vgl. [1, S. 38, 39]: Da wir mit der GFEM approximieren, gilt für die Basisfunktionen der Knoten folgende Zerlegung der Eins:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \psi_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \tag{36}$$

und damit für $\nabla_{\mathbf{x}}\psi_j \in L^2(\Omega_t)$ auch

$$\sum_{j\in\mathcal{N}} \nabla_{\mathbf{x}}\psi_j = 0 \quad \text{in } \Omega_t. \tag{37}$$

Wir betrachten eine konstante Funktion $u_h(\mathbf{x}, t)$ mit $u_j(t) = 1$, welche als Linearkombination (31) dargestellt nun also gerade Gleichung (36) entspricht. Setzen wir die konstante Funktion in die beiden Terme von $\mathcal{INT}_{1\,t_n}^{\,t_{n+1}}[\mathbf{H}U]$ ein, erhalten wir dank Gleichung (37) für jedes Intervall $(t_n, t_{n+1}) \subset I$

$$\sum_{j\in\mathcal{N}} \int_{\Omega_t} \psi_i \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta\psi_j) d\mathbf{x}dt = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}_{int}, \tag{38}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{N}} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\psi_i \nabla_{\mathbf{x}}\psi_j d\mathbf{x}dt = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}_{int}. \tag{39}$$

Für $\mathbf{F} = 0$ stellen wir das numerische Schema (35), aus dem dank Gleichungen (38) und (39) der Term $\mathcal{INT}_{1\,t_n}^{\,t_{n+1}}[\mathbf{H}U]$ herausfällt, um und erhalten mit Gleichung (36)

$$\int_{\Omega_{t_{n+1}}} \psi_i(\mathbf{x}, t_{n+1}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{t_n}} \psi_i(\mathbf{x}, t_n) d\mathbf{x} = \mathcal{INT}_{2\,t_n}^{\,t_{n+1}} \left[\int_{\Omega_t} \psi_i \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h d\mathbf{x} \right] \forall i \in \mathcal{N}_{int}. \tag{40}$$

Gleichung (40) drückt die *Geometric Conservation Laws* für unsere Finite-Elemente-Approximation aus. Das heißt, dass das Zeitintegrationsschema $\mathcal{INT}_2$ so gewählt werden muss, dass die Identität

$$\int_{\Omega_{t_{n+1}}} \psi_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{t_n}} \psi_h d\mathbf{x} = \mathcal{INT}_{2\,t_n}^{\,t_{n+1}} \left[\int_{\Omega_t} \psi_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h d\mathbf{x} \right] \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_{0,h}(\Omega_t) \tag{41}$$

in jedem Zeitintervall erhalten bleibt.

4.4 Ein Stabilitätsergebnis für das implizite Euler-Verfahren angewandt auf die erhaltende Formulierung

Wir bezeichnen mit u_h^n eine Approximation von $u_h(t^n)$, wobei u_h^n auf dem Gebiet Ω_{t^n} definiert ist. Es kann auf jede andere Konfiguration $\Omega_s, s \neq t^n$ transformiert werden durch die Abbildung $\mathcal{A}_{t^n,s} = \mathcal{A}_{h,s} \circ \mathcal{A}_{h,t^n}^{-1}$. Zur Vereinfachung schreiben wir wann immer wir u_h^n auf einem Gebiet $\Omega_s, s \neq t^n$ integrieren

$$\int_{\Omega_s} u_h^n d\mathbf{x} \quad \text{anstatt} \quad \int_{\Omega_s} u_h^n \circ \mathcal{A}_{t^n,s} d\mathbf{x}.$$

Wir gehen von einer stückweise in der Zeit konstanten Gebietsgeschwindigkeit aus und wenden nun das *implizite Euler-Verfahren* zur Zeit-Diskretisierung eines zweidimensionalen Problems auf Gleichung (32) an, die Finite-Elemente-Approximation der erhaltenden Formulierung. Dabei verwenden wir aus später ersichtlichen Gründen eine Mittelpunkt-Zeitintegrationsregel für den von der Gebietsgeschwindigkeit abhängenden Term und erhalten

$$\int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^{n+1}\psi_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{t^n}} u_h^n \psi_h d\mathbf{x} + \Delta t \mu \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_h d\mathbf{x}$$
$$+\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} \psi_h \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\beta - \mathbf{w}_h) u_h^{n+1}] d\mathbf{x} = \Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} f^{n+1} \psi_h d\mathbf{x} \;\; \forall \psi_h \in \mathcal{X}_{0,h}(\Omega_t) \tag{42}$$

mit

$$\begin{aligned} u_h &= 0 \;\; \text{auf } \partial\Omega_t, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ u_h^0 &= u_{0h} \;\; \text{in } \Omega_0. \end{aligned}$$

Wir setzen $\psi_h = u_h^{n+1}$ [1, vgl. S. 41]
und benutzen folgende Umformungen:

$$\int_{\Omega_{t^n}} u_h^n u_h^{n+1} d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})},$$

da für alle $a, b \in \mathbb{R}^d : ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.

$$\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} u_h^{n+1} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot [(\beta - \mathbf{w}_h) u_h^{n+1}] d\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}$$

ist analog zu Gleichung (21) aus Kapitel 3.1 nur, dass hier eine inkompressible Konvektionsgeschwindigkeit angenommen wird, weswegen der von β abhängende Term wegfällt.

$$\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} f^{n+1} u_h^{n+1} d\mathbf{x} \leq \Delta t \frac{C_\Omega}{2\mu}\|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}$$

ist analog zu Abschätzung (24).
Eingesetzt in Gleichung (42) erhalten wir die Ungleichung

$$\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \mu \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} - \frac{1}{2}\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}$$
$$\leq \Delta t \frac{C_\Omega}{2\mu}\|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})}. \tag{43}$$

Vgl. [1, S. 42]: Da das erhaltende Schema wie wir zuvor gezeigt haben die GCL erfüllt, können wir die GCL-Gleichung (41) benutzen in der wir $\psi_h = |u_h^{n+1}|^2$ setzen:

$$\begin{aligned}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} - \|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x} dt \\ &= \Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{44}$$

wobei der von der Gebietsgeschwindigkeit abhängende Term in Ungleichung (43) dank der Anwendung der Mittelpunkt-Zeitintegrationsregel genau dem Term auf der rechten Seite von Gleichung (44) entspricht.
Multiplizieren wir nun Ungleichung (43) mit zwei und setzen Gleichung (44) ein erhalten wir den folgenden Stabilitätsausdruck:

$$\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \mu \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} \leq \|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}. \tag{45}$$

Schlussendlich summieren wir über alle Zeitschritte und erhalten

$$\begin{aligned}&\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \mu \sum_{i=0}^{n} \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{i+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{i+1}})} \\ &\qquad \leq \|u_h^0\|^2_{L_2(\Omega_{t^0})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \sum_{i=0}^{n} \|f^{i+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{i+1}})}, \end{aligned} \tag{46}$$

ein dank der Anwendung der GCL-Formel von der Gebietsgeschwindigkeit unabhängiges Stabilitätsergebnis.

5 Finite-Elemente-Approximation der nicht erhaltenden Formulierung

Analog zu Kapitel 4.2 gehen wir hier mit der nicht erhaltenden Formulierung (14) vor und bekommen

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} \left.\frac{\partial u_h}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} \psi_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} \psi_h (\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_h d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} u_h \nabla_{\mathbf{x}} \psi_h d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_t} f \psi_h d\mathbf{x} \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_{0,h}(\Omega_t) \end{aligned} \tag{47}$$

mit

$$\begin{aligned} u_h &= u_D \quad \text{für } x \in \partial\Omega_t, \quad t \in I, \\ u_h &= u_{0h} \quad \text{für } x \in \Omega_0, \quad t = t_0, \end{aligned}$$

wobei wir dank der Annahme der Inkompressibilität von β den Term $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta u_h)$ durch $\beta \nabla_{\mathbf{x}} u_h$ ersetzen konnten, denn

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta u_h) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta u_h + \beta \nabla_{\mathbf{x}} u_h = 0 + \beta \nabla_{\mathbf{x}} u_h.$$

Gleichung (47) lässt sich analog zu Gleichung (32) in folgende algebraische Form umschreiben:

$$\mathbf{M}(t)\frac{dU}{dt} + \mathbf{H}(t)U - \mathbf{B}(t, \mathbf{w}_h)U = \mathbf{F} \tag{48}$$

mit

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{w}_h) = \left\{ \int_{\Omega_t} \psi_i (\mathbf{w}_h \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \psi_j d\mathbf{x} \right\}_{i,j \in \mathcal{N}_{int}}. \tag{49}$$

Für eine konstante Funktion $u_h(\mathbf{x}, t)$ ($u_j(t) = 1$) erhalten wir hier dank Gleichung (37) zusätzlich zu Gleichungen (38) und (39) und unabhängig von der numerischen Zeitintegration

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} \int_{\Omega_t} \psi_i (\mathbf{w}_h \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \psi_j d\mathbf{x} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{N}_{int}. \tag{50}$$

Damit erfüllt dieses Schema automatisch die *Geometric Conservation Laws*, da es eine konstante Lösung liefern kann. [1, vgl. S. 42, 43]

5.1 Stabilitätsanalyse des semi-diskreten Schemas

Außer für feste Gebiete können wir für die Stabilitätsanalyse nicht $\psi_h = u_h$ setzen, da die beiden Funktionen in der Regel eine unterschiedliche Zeitentwicklung haben. Jedoch können wir wieder u_h als Linearkombination der Testfunktionen mit zeitabhängigen Koeffizienten ausdrücken. [1, S. 37]
Vgl. [1, S. 43]: Wir setzen also $\psi_h = \psi_j$, multiplizieren die Gleichung mit $u_j(t)$, summieren über j und wenden Gleichung (31) an, so dass wir Gleichung (47) umgeformt haben zu

$$\int_{\Omega_t} \left.\frac{\partial u_h}{\partial t}\right|_{\mathbf{Y}} u_h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_h u_h d\mathbf{x} + \mu \int_{\Omega_t} |\nabla_{\mathbf{x}} u_h|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} f u_h d\mathbf{x} \tag{51}$$

Den ersten Term formen wir analog zu Gleichung (19) aus Kapitel 3.1 um, aus dem zweiten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_h u_h d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} |u_h|^2 d\mathbf{x} \\
&\overset{\text{Greensche Formel (1)}}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_t} (\beta - \mathbf{w}_h) |u_h|^2 n d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\beta - \mathbf{w}_h) |u_h|^2 d\mathbf{x} \\
&\overset{(\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta = 0)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h|^2 d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{52}$$

Setzen wir die beiden Umformungen in Gleichung (51) ein, erhalten wir exakt Gleichung (22) für die numerische Lösung u_h und mit $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \beta = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h\|^2_{L_2(\Omega_t)} = \int_{\Omega_t} f u_h d\mathbf{x} \tag{53}$$

und damit auch dieselbe von der Gebietsgeschwindigkeit unabhängige Stabilitätsungleichung (29) für u_h

$$\|u_h(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \mu \int_{t_0}^{t} \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds \leq \|u_h(t_0)\|^2_{L_2(\Omega_{t_0})} + \frac{C_\Omega}{\mu} \int_{t_0}^{t} \|f\|^2_{L_2(\Omega_s)} ds. \tag{54}$$

5.2 Stabilitätsanalyse für das implizite Euler-Verfahren

Wir analysieren nun die folgende implizite Euler-Diskretisierung in der Zeit von Gleichung (47), der Finite-Elemente-Approximation der nicht erhaltenden Formulierung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^{n+1}\psi_h d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^{n}\psi_h d\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \psi_h(\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1} \\ + \mu \nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_h d\mathbf{x} = \Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} f^{n+1}\psi_h d\mathbf{x} \quad \forall \psi_h \in \mathcal{X}_{0,h}(\Omega_t) \end{aligned} \tag{55}$$

mit

$$\begin{aligned} &u_h = 0 \text{ auf } \partial\Omega_t, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ &u_h^0 = u_{0h} \text{ in } \Omega_0. \end{aligned}$$

Wir setzen $\psi_h = u_h^{n+1}$ [1, vgl. S. 44]
und benutzen folgende Umformungen:

$$\int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^n u_h^{n+1} d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})},$$

da für alle $a, b \in \mathbb{R}^d : ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$,

$$\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} u_h^{n+1}(\beta - \mathbf{w}_h) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1} d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}$$

ist analog zu Gleichung (52) und

$$\Delta t \int_{\Omega_{t^{n+1}}} f^{n+1} u_h^{n+1} d\mathbf{x} \leq \Delta t \frac{C_\Omega}{2\mu}\|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}$$

ist analog zu Abschätzung (24) aus Kapitel 3.1.
Eingesetzt in Gleichung (55) erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} &+ \Delta t\mu\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}\\ &\leq -\frac{1}{2}\Delta t\int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x} + \Delta t\frac{C_\Omega}{2\mu}\|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}\\ &+ \Delta t\frac{\mu}{2}\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \frac{1}{2}\|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}. \end{aligned} \tag{56}$$

Der letzte Term muss hierbei umgeformt werden, da er momentan in der Konfiguration zum Zeitpunkt t^{n+1} ausgewertet wird.
Da das nicht erhaltende Schema wie wir zuvor gezeigt haben die GCL erfüllt, können wir die GCL-Gleichung (41) benutzen in der wir $\psi_h = |u_h^n|^2$ setzen:

$$\|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} = \|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^n|^2 d\mathbf{x}dt. \tag{57}$$

Wir ziehen nun auf beiden Seiten der Ungleichung (56) ihre beiden vorletzten Terme ab, setzen Gleichung (57) ein, multiplizieren das Ganze mit 2 und erhalten

$$\begin{aligned}\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} &+ \Delta t\mu\|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}\\ &\leq \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^n|^2 d\mathbf{x}dt - \Delta t\int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}\right)\\ &\qquad + \|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \Delta t\frac{C_\Omega}{\mu}\|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}. \end{aligned} \tag{58}$$

Es fällt auf, dass wir wegen dem Auftreten des Terms

$$\left(\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^n|^2 d\mathbf{x}dt - \Delta t\int_{\Omega_{t^{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}\right) \tag{59}$$

kein von der Gebietsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_h$ unabhängiges Stabilitätsergebnis erhalten können.
Da für den rechten Teil des Klammerterms in der Konfiguration $\Omega_{t^{n+1/2}}$ gilt

$$\Delta t\int_{\Omega_{t^{n+1/2}}} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x} = \int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h|u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x}dt, \tag{60}$$

können wir den Klammerterm approximieren als

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{w}_h(|u_h^n|^2 - |u_h^{n+1}|^2) d\mathbf{x}dt, \tag{61}$$

was üblicherweise aber ungleich null ist und somit nichts daran ändert, dass wir kein von $\mathbf{w}_h$ unabhängiges Stabilitätsergebnis erhalten können. Gleichung (56) bis hier vgl. [1, S. 44, 45].

Wir schätzen nun analog zu Ungleichung (25) den eben approximierten Term ab:

$$-\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^{n+1}|^2 d\mathbf{x} dt \leq \Delta t \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h(t^{n+1})\|_{L_\infty(\Omega_{t^{n+1}})} \|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} \tag{62}$$

und

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\Omega_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h |u_h^n|^2 d\mathbf{x} dt \leq \Delta t \sup_{t \in (t^n, t^{n+1})} \|J_{A_{t_n, t_{n+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h\|_{L_\infty(\Omega_t)} \|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})}, \tag{63}$$

wobei $J_{A_{t_n,t_{n+1}}}$ die Determinante der Jakobimatrix der ALE-Abbildung von Ω_{t_n} nach $\Omega_{t_{n+1}}$ und damit die Transformation auf eben diesen Gebieten ist, siehe [1, S. 13, 19, 40].

Der Übersicht halber definieren wir uns die Notationen

$$\begin{aligned} \gamma_1^i &= \|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h(t^i)\|_{L_\infty(\Omega_{t^{i+1}})}, \\ \gamma_2^i &= \sup_{t \in (t^i, t^{i+1})} \|J_{A_{t_i,t_{i+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h\|_{L_\infty(\Omega_t)}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Abschätzungen der Approximation (61) in Ungleichung (58) ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \mu \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} \\ &\leq \Delta t \gamma_1^{n+1} \|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + (1 + \Delta t \gamma_2^n) \|u_h^n\|^2_{L_2(\Omega_{t^n})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \|f^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})}. \end{aligned} \tag{64}$$

Über n summiert erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
&\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t\mu \sum_{i=1}^{n+1} \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})} \\
&\qquad \le \Delta t \gamma_1^{n+1} \|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} (\gamma_1^i + \gamma_2^i) \|u_h^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})} \\
&\qquad\quad + (1 + \Delta t \gamma_2^0) \|u_h^0\|^2_{L_2(\Omega_{t^0})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \sum_{i=1}^{n+1} \|f^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})} \\
&\le \Delta t \sum_{i=1}^{n+1} (\gamma_1^i + \gamma_2^i) \|u_h^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})} + (1 + \Delta t \gamma_2^0) \|u_h^0\|^2_{L_2(\Omega_{t^0})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \sum_{i=1}^{n+1} \|f^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Als letzten Schritt wenden wir auf Ungleichung (65) das folgende *diskrete Grönwall Lemma* an. [1, vgl. S. 45]

Lemma [1, S. 46] *Gegeben $\delta, g_0, a_n, b_n, c_n, \gamma_n$ Folgen von nicht negativen Zahlen für $n \ge 0$. Falls die folgende Ungleichheit gilt*

$$a_n + \delta \sum_{j=0}^{n} b_j \le \delta \sum_{j=0}^{n} \gamma_j a_j + \delta \sum_{j=0}^{n} c_j + g_0,$$

dann gilt für alle $n \ge 0$

$$a_n + \delta \sum_{j=0}^{n} b_j \le \exp\left(\delta \sum_{j=0}^{n} \sigma_j \gamma_j\right) \left[\delta \sum_{j=0}^{n} c_j + g_0\right],$$

wobei $\sigma_j = \frac{1}{1-\gamma_j \delta}$ und $\gamma_j \delta < 1$ für alle j.

Vgl. [1, S. 46]: Damit erhalten wir aus Ungleichung (65) den folgenden von der Gebietsgeschwindigkeit abhängenden Stabilitätsausdruck:

$$\begin{aligned}
&\|u_h^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega_{t^{n+1}})} + \Delta t\mu \sum_{i=1}^{n+1} \|\nabla_{\mathbf{x}} u_h^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})} \\
&\le \left[(1 + \Delta t \gamma_2^0) \|u_h^0\|^2_{L_2(\Omega_{t^0})} + \Delta t \frac{C_\Omega}{\mu} \sum_{i=1}^{n+1} \|f^i\|^2_{L_2(\Omega_{t^i})}\right] \exp\left(\Delta t \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_1^i + \gamma_2^i}{1 - \Delta t(\gamma_1^i + \gamma_2^i)}\right)
\end{aligned} \tag{66}$$

mit der Bedingung

$$\Delta t < \frac{1}{\gamma_1^i + \gamma_2^i} = \left(\|\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h(t^i)\|_{L_\infty(\Omega_{t^i})} + \sup_{t \in (t^i, t^{i+1})} \|J_{A_{t_i,t_{i+1}}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_h\|_{L_\infty(\Omega_t)} \right)^{-1}, \tag{67}$$

was heißt, dass auch die maximal zulässige Zeitschrittgröße von der Geschwindigkeit mit der sich das Gebiet deformiert abhängt.

6 Résumé

Die Stabilitätsanalyse des impliziten Euler-Verfahrens angewandt auf die erhaltende Formulierung zeigt, dass diese Variante deutlich einfacher zu verwenden ist, da sie bedingungslos stabil ist. Es wird für die Stabilität keine Bedingung an das Zeitintervall Δt gestellt. Sinnvollerweise sollten die Zeitintervalle trotzdem nicht zu groß gewählt werden.
Die Abhängigkeit des Stabilitätsausdrucks des impliziten Euler-Verfahrens angewandt auf die nicht erhaltende Formulierung von der Gebietsgeschwindigkeit $\mathbf{w}_h$ bereitet keine Probleme, da diese geeignet gewählt werden kann. Jedoch muss bei der Wahl die Bedingung berücksichtigt werden, dass das maximal wählbare Δt durch einen von der Gebietsgeschwindigkeit abhängenden Term begrenzt wird. Je höher die Gebietsgeschwindigkeit ausfällt, desto kleiner müssen die Zeitschritte sein.

Literatur

[1] Nobile, Fabio: *Numerical approximation of fluid-structure interaction problems with application to Haemodynamics*. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2001

[2] Larsson, Stig, Thomeé, Vidar: *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden*. Berlin: Springer, 2005

[3] Amann, Herbert, Escher, Joachim: *Analysis III*. Basel, Berlin, Boston: Birkhäuser, 2001

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Wiesbaden, den 15. Juni 2011