

# Mathematik contra Landminen

Von Martin Hanke-Bourgeois

**Im Rahmen eines vom Bundesministerium für Bildung und Forschung finanzierten interdisziplinären Forschungsprojektes helfen Mainzer Mathematiker erfolgreich dabei, die Suche nach Landminen zu optimieren.**

Landminen als Hinterlassenschaften bewaffneter Konflikte gefährden in vielen Ländern der Erde die Bevölkerung und verhindern eine effiziente landwirtschaftliche Nutzung dieser Gebiete. Aus diesem Grund wurde 1997 in Montreal in der sogenannten Ottawa Konvention das Verbot aller Anti-Personenminen beschlossen: den Unterzeichnerstaaten ist demnach Produktion, Handel, Export und Einsatz dieser Waffen untersagt. In dem Abkommen, das Deutschland 1999 unterzeichnet hat, wurde ferner eine zehnjährige Frist zur vollständigen Beseitigung aller vergrabenen Landminen gesetzt.

## Der Projektverbund „HuMin/MD“

Die Räumung der weltweit etwa 100 Millionen vergrabenen Landminen ist jedoch eine große finanzielle und technische Herausforderung. Vor diesem Hintergrund hat das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) im März 2003 eine Fördermaßnahme zum Themenbereich „Minendetektions-Technologien zum Humanitären Minenräumen – Phase 1: Metalldetektion“ (HuMin/MD) ausgeschrieben. Ziel der Fördermaßnahme war, das Potential handelsüblicher Metalldetektoren durch Methoden der Signalverarbeitung sowie moderne bildgebende Verfahren zu verbessern. Zum Zuge kam im Herbst 2003 ein Projektverbund „HuMin/MD“ ([www.humin-md.de](http://www.humin-md.de)) aus mathematischen, geowissenschaftlichen und elektrotechnischen Arbeitsgruppen von universitären und außeruniversitären Forschungseinrichtungen, sowie einem kleineren, aus einer Universität heraus gegründeten Wirtschaftsunternehmen. Die Johannes Gutenberg-Universität Mainz war durch die Arbeitsgruppe des Autors aus dem Bereich der Numerischen Mathematik vertreten.

Bei handelsüblichen Metalldetektoren, wie sie zum humanitären Minenräumen meist eingesetzt werden, unterscheidet man primär zwei Gerätetypen. Auf der einen Seite gibt es sogenannte Impulsgeräte, die im Wesentlichen aus einer Spule bestehen. Über diese Spule wird zunächst durch ein kurzes elektrisches Signal ein Magnetfeld erzeugt und anschließend wird die in der Spule abfallende Spannung gemessen. Aus der Spannungskurve wird auf mögliche metallische

Gegenstände in der Umgebung des Metalldetektors zurückgeschlossen. Die sogenannten Frequenzgeräte arbeiten demgegenüber mit zwei ineinander liegenden Spulen: Die eine Spule erzeugt durch einen Wechselstrom von einigen Kilohertz ein zeitharmonisches Magnetfeld (Primärfeld), die zweite Spule misst die induzierte Spannung. Durch die spezielle Spulenanordnung soll bei der Messung das Primärfeld ausgeblendet werden; im Idealfall nimmt das Messsignal nur das sogenannte Sekundärfeld auf, das durch die Streuung des Primärfelds an metallischen Störkörpern im Boden verursacht wird.

Während bei den Impulsgeräten die Daten für jeden Ortspunkt aus einer Zeitreihe (bzw. einer reellwertigen Funktion der Zeit) bestehen, liegt im zweiten Fall pro Ortspunkt bestenfalls nur ein dreidimensionaler Feldvektor vor. Auf den ersten Blick scheint daher die Datenmenge für die Impulsgeräte deutlich umfangreicher zu sein. Bei genauerer Analyse ergibt sich hieraus allerdings kein wirklicher Vorteil, da die exponentiell abklingenden Messkurven mit wenigen Freiheitsgraden gut darstellbar sind.

Die inhaltlichen Schwerpunkte des Projektverbunds „HuMin/MD“ waren vielfältig: sie reichten von der Bestimmung relevanter Bodenparameter und deren Einfluss auf die Messsignale, über die Optimierungen der Messtechnik kommerzieller Detektoren zur Bereitstellung von ortsaufgelösten Messdaten, bis hin zum Aufbau einer voll automatisierten Messstation. Zudem war die Teilnahme an internationalen Messkampagnen auf den Minentestfeldern von Ispra (Italien) und Benkovac (Kroatien) inbegriffen. Die Mehrzahl der Teilprojekte beschäftigte sich zudem mit Methoden der Signalanalyse, um in der Datenflut der Impulsgeräte charakteristische Minensignaturen aufzuspüren, oder mit nachgeschalteten bildgebenden Verfahren bei Frequenzdetektoren.

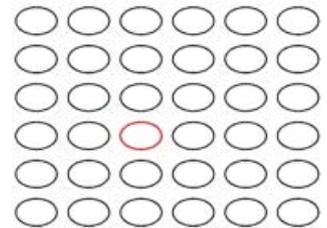


Abb. 1: Schematische Darstellung eines 6 x 6 Detektorarrays. Jede Ellipse steht für eine Messspule. Die rote Spule erzeugt ein Primärfeld, alle Spulen messen das zugehörige Sekundärfeld.

Alle Abb.: © Martin Hanke-Bourgeois

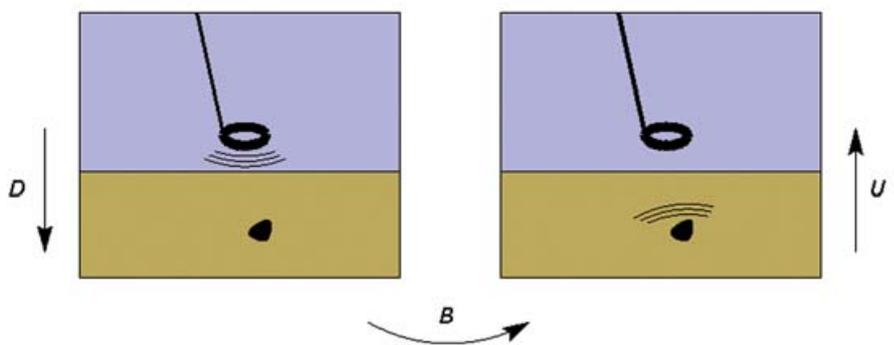


Abb. 2: Schematische Darstellung der Faktorisierung des Messoperators in drei Faktoren: Der Operator  $D$  („down“) beschreibt die Generierung des Primärfeldes,  $B$  steht für einen Brechungsoperator und  $U$  („up“) steht für die Rückstreuung des Sekundärfelds.

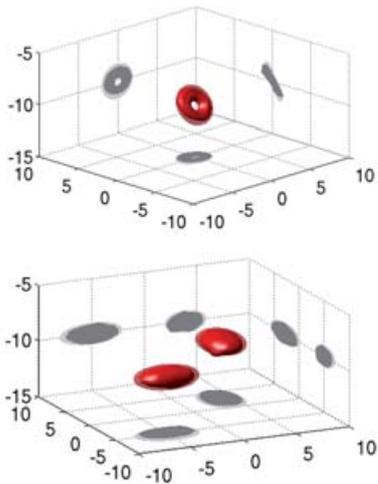


Abb. 3: Numerische Rekonstruktionen zweier Ellipsoide (unten) sowie eines Torus (oben). Die tatsächlichen Objekte sind etwas heller, die Rekonstruktionen etwas dunkler dargestellt; in allen Fällen sind die Rekonstruktionen geringfügig kleiner. Zur besseren dreidimensionalen Vorstellung sind zusätzlich die entsprechenden Schattenrisse auf die drei Randflächen projiziert.

### Elektromagnetische Induktionstomographie

Aufgrund ihrer einschlägigen Expertise im Bereich der tomographischen Inversionsmethoden wendete sich die Mainzer Arbeitsgruppe im weiteren Verlauf des Projekts primär der letztgenannten Problemstellung zu. Sie konzentrierte sich dabei vor allem auf die Frage, wie durch eine geeignete Vernetzung mehrerer Frequenzdetektoren in Form sogenannter Detektorarrays konkrete Rückschlüsse über den Boden und die darin enthaltenen Störkörper möglich sind. Zur Illustration der Vorgehensweise sei auf Abbildung 1 verwiesen, welche ein Detektorarray aus sechs mal sechs identischen Frequenzdetektoren illustrieren soll: In einer einzelnen (Teil-) Messung wird – etwa durch die rot hervorgehobene Spule – ein zeitharmonisches Primärfeld erzeugt und an allen Spulen des Detektorarrays das induzierte Sekundärfeld gemessen. Jede der  $N = 36$  Spulen kann einmal die Rolle der Erregerspule übernehmen, so dass sich auf diese Weise insgesamt ein Datensatz aus  $N^2$  Feldvektoren ergibt, die in einer  $N$  mal  $N$ -dimensionalen Matrix abgelegt werden können. Jeder Matrixeintrag ist seinerseits ein dreidimensionaler komplexer Feldvektor, was im Weiteren zur Vereinfachung der Vorstellung ausgeblendet werden soll.

Eine einzelne Spalte dieser Matrix gibt also das Sekundärfeld für ein individuell erzeugtes Primärfeld wieder, und zwar an den entsprechenden Gitterpunkten des Ortsbereichs, um die die einzelnen Detektoren positioniert sind. Der Raum, der aus diesen Spaltenvektoren aufgespannt wird, ist der Bildbereich einer zugehörigen Abbildung  $M$ , die ein vorgegebenes Primärfeld auf das induzierte Sekundärfeld abbildet. Abbildung 2 illustriert diese Abbildung und stellt sie in natürlicher Weise als Verkettung bzw. Produkt dreier Teil-Abbildungen (Operatoren) dar, nämlich  $M = UBD$ .

Diese drei Operatoren stehen für die Erzeugung des Primärfelds (Operator  $D$ , für „down“), eine Brechung an der Oberfläche des Streukörpers (Operator  $B$ ) und das dadurch erzeugte Sekundärfeld (Operator  $U$ , für „up“). Eine solche Faktorisierung von  $M$  ist möglich<sup>4</sup>, allerdings handelt es sich – anders als in der Abbildung suggeriert – nicht um eine physikalisch kausale Verkettung von Streuprozessen, wie man sich das bei dem entsprechenden zeitabhängigen Prozess vorstellen mag. Vielmehr wirken die zeitharmonischen Magnetfelder gleichzeitig und überlagern sich dabei, so dass eine Unterscheidung zwischen Ursache und Wirkung hier willkürlich vorgenommen wird.

Dem Operator  $U$ , der zuletzt angewendet wird, kommt für die Inversion eine besondere Bedeutung zu. Dieser Operator wird gerne „fiktiver Messoperator“ genannt, da er die gemessenen Sekundärfelder als das Ergebnis fiktiver Störquellen auf den Oberflächen der

vorliegenden Streukörper interpretierbar macht. Fiktive Quellen können leicht numerisch simuliert werden, etwa durch magnetische Dipole an beliebigen Orten im Untergrund. Ein Vergleich dieser simulierten Dipolfelder mit den real gemessenen „fiktiven Störfeldern“ erlaubt dann die genaue Bestimmung der vorliegenden fiktiven Quellen und damit aller Streuobjekte. Diese Methode ist angelehnt an ein entsprechendes Verfahren, das vor einigen Jahren für die elektrische Impedanztomographie entwickelt und an gleicher Stelle vorgestellt wurde.<sup>1</sup>

Tatsächlich ist die obige Darstellung jedoch stark vereinfachend. Insbesondere suggeriert sie, dass die vorliegenden Messdaten (des Operators  $M$ ) und die „fiktiven Messdaten“ (des Operators  $U$ ) im Wesentlichen gleich oder gleichartig seien. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, da der Operator  $M$  nicht nur aus  $U$  sondern unter anderem auch aus dessen transponiertem Operator  $D = U^T$  zusammengesetzt wird; dieser bildet das eingepreßte Primärfeld auf das an dem Störkörper anliegende Magnetfeld ab (quasi die entsprechende Abbildung in die umgekehrte Richtung). Bei hochfrequenten Feldern ist bislang nicht bekannt, wie aus dem Bildbereich von  $M$  ein Rückschluss auf den vollständigen Bildbereich von  $U$  möglich ist. Die hier vorliegenden niederfrequenten Wechselströme erlauben allerdings eine Vereinfachung der Maxwell'schen Modellgleichungen im Rahmen der sogenannten Magnetostatik. In diesem Kontext ist es mit Hilfe von tiefer liegenden Resultaten der Funktionalanalysis möglich, den Bildbereich von  $U$  vollständig aus dem berechenbaren Bildbereich des Operators  $|M|^{1/2}$  zu rekonstruieren.<sup>3,5</sup> Für diese theoretischen Ergebnisse erhielt Bastian Gebauer 2007 den Dissertationspreis der Freunde der Johannes Gutenberg-Universität.

### Numerische Ergebnisse

Abbildung 3 zeigt einige Rekonstruktionen, die mit der vorgestellten Methode aus synthetischen, das heißt numerisch simulierten Testdaten, rekonstruiert wurden. Simuliert wurde eine Situation mit einem Detektorarray aus sechs mal sechs Messdetektoren wie in Abbildung 1 und diversen Streukörpern mit einem Durchmesser von etwa fünf Zentimetern, die zehn Zentimeter unter der Erdoberfläche vergraben sind. Das Detektorarray hat eine Kantenlänge von rund 30 Zentimetern, die Rekonstruktionen zeigen einen darunter liegenden Quader mit 20 Zentimeter horizontaler Kantenlänge. Die Ergebnisse belegen, dass die Methode grundsätzlich funktioniert und erhebliche Rückschlüsse auf die Zahl und Form metallischer Streukörper erlaubt.

In der Praxis sind die Möglichkeiten allerdings deutlich eingeschränkt. Für die hier gezeigten Rekonstruktionen ist eine erhebliche Messgenauigkeit erforderlich, die bei Messungen im freien Feld nur schwer erreicht werden kann. Hinzu kommen störende Rahmenbe-

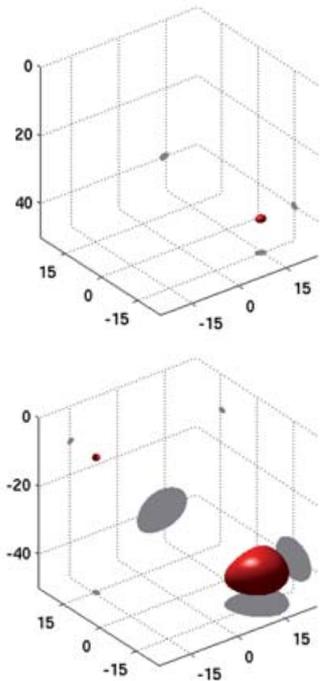


Abb. 4: Numerische MUSIC-Rekonstruktionen. Die beiden Bilder unterscheiden sich in ihrer „Fokussierung“ auf die jeweilige Rekonstruktionstiefe: unten ist die Rekonstruktion auf den oberen Streukörper scharf eingestellt, dafür wird der untere Streukörper deutlich überzeichnet; oben ist statt dessen auf den unteren Streukörper fokussiert, so dass der obere Streukörper nicht mehr erkennbar ist.

dingungen wie Unebenheiten im Gelände, heterogene Bodenzusammensetzungen sowie technologische Schwierigkeiten bei der Konstruktion entsprechender Detektorarrays. Aus diesem Grund wird derzeit ein modifiziertes Verfahren entwickelt, das mit einer geringeren Messgenauigkeit auskommt, allerdings den Nachteil hat, lediglich die Position und Zahl der Streukörper, nicht aber deren genaue Form bestimmen zu können. Grundlage dieses Verfahrens, das sich an die in der Literatur unter dem Namen MUSIC (für MULTiple Signal Classification) bekannten Verfahren anlehnt, ist eine detaillierte asymptotische Analyse der Sekundärfelder für beliebig kleine Streukörper variabler Gestalt.<sup>6</sup>

Abbildung 4 zeigt erste entsprechende numerische Rekonstruktionen unter ähnlichen Rahmenbedingungen wie bei der vorangegangenen Abbildung 3. Rekonstruiert werden zwei verschieden tief vergrabene Streukörper, wobei der obere Streukörper einen um einen Faktor zehn kleineren Durchmesser hat als derjenige in Abbildung 3. Entscheidend ist jedoch, dass beide Rekonstruktionen der Abbildung 4 mit einem künstlich zugefügten Datenfehler berechnet wurden und anhand der Simulationen nachgewiesen werden konnte, dass das MUSIC-Verfahren tatsächlich mit einer deutlich geringeren Messgenauigkeit auskommt als das andere Verfahren.

Die oben gezeigten numerischen Ergebnisse wurden von den Mitarbeitern Dr. Bastian Gebauer, Roland Griesmaier und Christoph Schneider im Rahmen des genannten BMBF-Projekts gerechnet. Die verwendeten Daten wurden mit einem Programmcode simuliert, welcher im Rahmen eines Teilprojekts der Universität Göttingen in demselben Projektverbund erstellt wurde.<sup>2</sup>

## ■ Summary

As a legacy of armed conflicts land mines endanger the population in many countries. The rapid and complete removal of these mines world-wide is a large technical challenge. Metal detectors provide a state of the art technology for humanitarian demining; however, they suffer under high false alarm rates. This paper describes tomographic techniques to localize and determine the shape of scatterers within the ground more reliably, using multistatic measurements. Numerical results for simulated data serve as a proof of concept concerning the applicability of these techniques in practice.



## Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois

Martin Hanke-Bourgeois, Professor für Angewandte Mathematik am Fachbereich 08 der Johannes Gutenberg-Universität, wurde 1961 in Frankfurt am Main geboren. Nach Studium und Promotion an der Universität Karlsruhe folgten Forschungsaufenthalte an der Johannes Kepler-Universität Linz (Österreich) und an verschiedenen Universitäten in den USA. Nach der Habilitation 1994 vertrat er zunächst von 1995 bis 1997 den Lehrstuhl Technomathematik an der Universität Kaiserslautern. 1998 folgte er dem Ruf an die Johannes Gutenberg-Universität; einen weiteren Ruf nach Tübingen hat er 2005 abgelehnt.

## ■ Kontakt

Prof. Dr. Martin Hanke-Bourgeois  
 Institut für Mathematik  
 Johannes Gutenberg-Universität Mainz  
 D-55099 Mainz  
 Tel. +49 (0) 61 31 - 39 22 528  
 Email: hanke@math.uni-mainz.de

## Literatur

1. Brühl, M. and Hanke-Bourgeois, M. (2000) Kann Mathematik der elektrischen Impedanztomographie zum Durchbruch verhelfen? Forschungsmagazin der Johannes Gutenberg-Universität Mainz **16**: 32-40.
2. Delbary, F., Ehrhard, K., Kreß, R., Potthast, R., Schulz, J. (2008). Inverse electromagnetic scattering in a two-layered medium with an application to mine detection. *Inverse Problems* **24**: 015002 (18pp).
3. Gebauer, B. (2006). Gebietserkennung mit der Faktorisierungsmethode. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
4. Gebauer, B., Hanke, M., Kirsch, A., Muniz, W., Schneider, C. (2005). A sampling method for detecting buried objects using electromagnetic scattering. *Inverse Problems* **21**: 2035-2050.
5. Gebauer, B., Hanke, M., Schneider, C. (2008). Sampling methods for low-frequency electromagnetic imaging. *Inverse Problems* **24**: 015007 (18pp).
6. Griesmaier, R. (2008). An asymptotic factorization method for inverse electromagnetic scattering in layered media. *SIAM J. Appl. Math.* **68**: 1378-1403.