

Mathematische Modellierung in der Hämodynamik



JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

...

Ergänzungsvorlesung SoSe 2014
Dienstag 10.00-12.00

Dr. Anna Hundertmark
Institut für Mathematik, AG Numerik



Themen

Wir werden erarbeiten:

Wir werden erarbeiten:

↔ Was ist **Blut**? Welche Eigenschaften hat ein **Blutgefäß**?

Wie funktioniert das **Kreislaufsystem**?

(Physiologie und Mechanik verstehen)

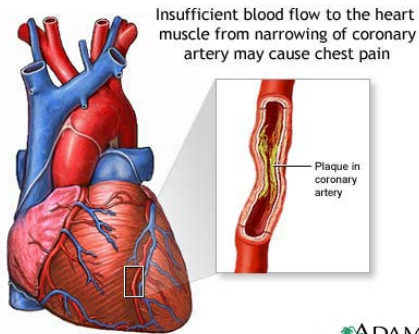
Wir werden erarbeiten:

↪ Was ist **Blut**? Welche Eigenschaften hat ein **Blutgefäß**?

Wie funktioniert das **Kreislaufsystem**?

(Physiologie und Mechanik verstehen)

↪ **Problemstellungen** für numerische Simulation.



Wir werden erarbeiten:

↔ Was ist **Blut**? Welche Eigenschaften hat ein **Blutgefäß**?

Wie funktioniert das **Kreislaufsystem**?

(Physiologie und Mechanik verstehen)

↔ **Problemstellungen** für numerische Simulation.

↔ **Physikalisch-mathematische Modellierung** von der Blutströmung und der Mechanik der Gefäßwände (Struktur)

Wir werden erarbeiten:

↔ Was ist **Blut**? Welche Eigenschaften hat ein **Blutgefäß**?

Wie funktioniert das **Kreislaufsystem**?

(Physiologie und Mechanik verstehen)

↔ **Problemstellungen** für numerische Simulation.

↔ **Physikalisch-mathematische Modellierung** von der Blutströmung und der Mechanik der Gefäßwände (Struktur)

↔ Mathematisch **korrekte Problemstellung** und (verallgemeinerten) analytischen Lösungen

Wir werden erarbeiten:

↔ Was ist **Blut**? Welche Eigenschaften hat ein **Blutgefäß**?

Wie funktioniert das **Kreislaufsystem**?

(Physiologie und Mechanik verstehen)

↔ **Problemstellungen** für numerische Simulation.

↔ **Physikalisch-mathematische Modellierung** von der Blutströmung und der Mechanik der Gefäßwände (Struktur)

↔ Mathematisch **korrekte Problemstellung** und (verallgemeinerten) analytischen Lösungen

↔ Methoden zur **numerischen Lösung vollständig gekoppelter Fluid-Struktur Systemen**

I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem

Physiologische Angaben

II. Strömungsmodelle für Blut

Poiseuille-Strömung

Navier-Stokesches Gleichungssystem

III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)

Mechanische Eigenschaften des Gefäßes

Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)

Modelle für dicke Wände (thick structure)




IV. Koppelung des Fluides und der Struktur

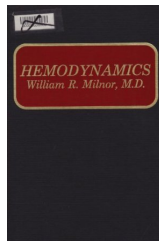
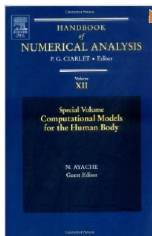
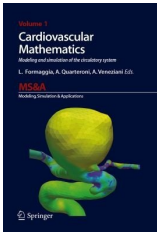
Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung

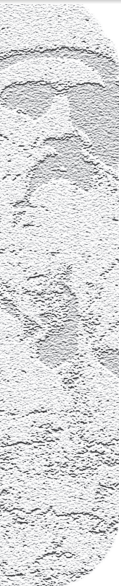
Numerische Algorithmen

V. Themen zum Abschlusskolloquium

Literatur

-  [1] L. Formaggia, A. Quarteroni, A. Veneziani: Cardiovascular Mathematics, Springer, Milano 2009
-  [2] L. Formaggia, A. Quarteroni: Mathematical Modelling and Numerical Simulation of the Cardiovascular System, in Handbook of Numerical Analysis, in: P.G. Ciarlet et al (Eds.), Computational Models for the Human Body, Vol XII, Elsevier 2004, [pdf Datei](#)
-  [3] William R. Milnor: Hemodynamics, Wiliam & Wilkins 1982





I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem

Physiologische Angaben

II. Strömungsmodelle für Blut

Poiseuille-Strömung

Navier-Stoksches Gleichungssystem

III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)

Mechanische Eigenschaften des Gefäßes

Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)

Modelle für dicke Wände (thick structure)

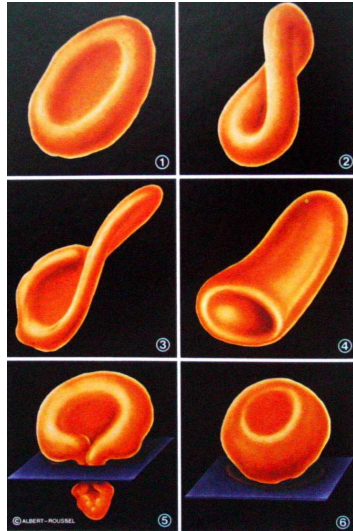
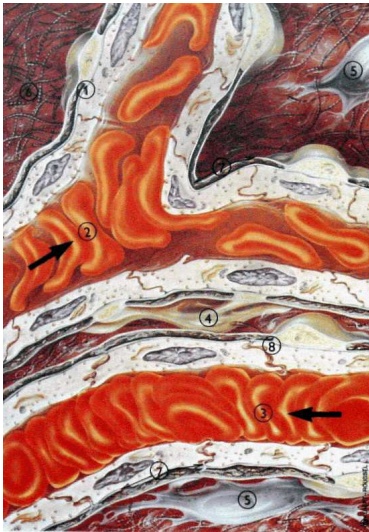
IV. Koppelung des Fluides und der Struktur

Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung

Numerische Algorithmen

V. Themen zum Abschlusskolloquium

Zusammensetzung des Blutes, Blutkörperchen



Erythrozythen, Quelle: D. Bartko, M. Drobny: *Neurólogia*, Osveta (1991)

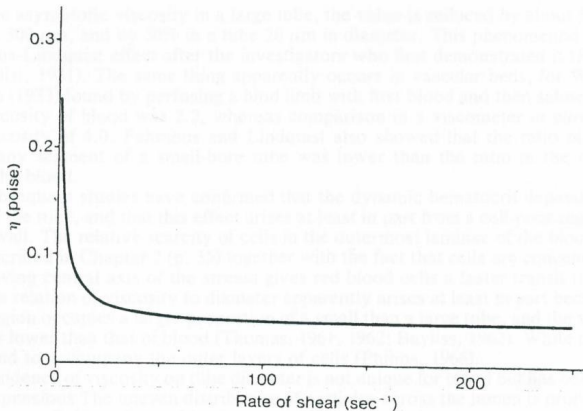
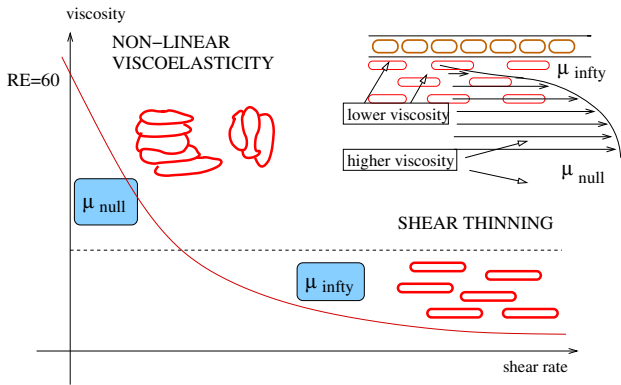


Fig. 3.2. From data in the literature collected by Whitmore, 1968. Non-Newtonian behavior of normal human blood. *Abscissa*, rate of shear (sec^{-1}). *Ordinate*, apparent viscosity (poise). Viscosity is comparatively high at low rates of shear but approaches an asymptotic value above about 100 sec^{-1} .

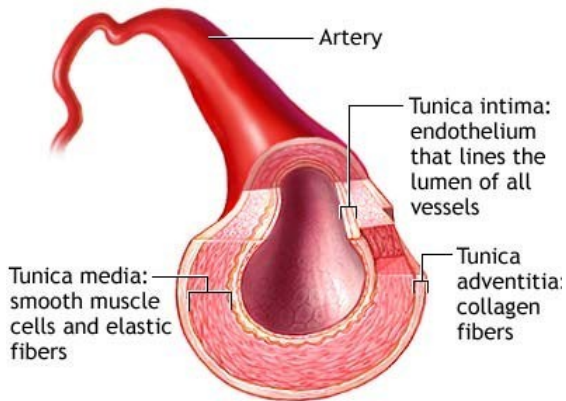
Quelle: [3]

Rheologie des Blutes



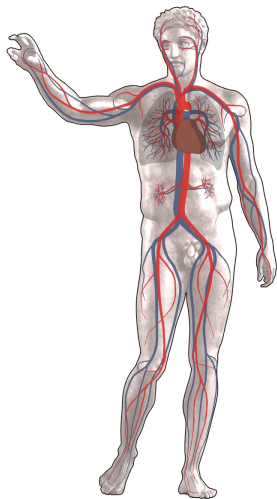
Quelle: [3]

Blutgefäß

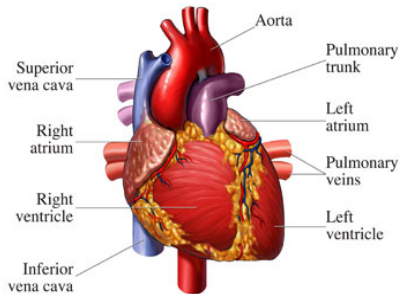


Quelle: A.D.A.M., Inc.

Kreislaufsystem

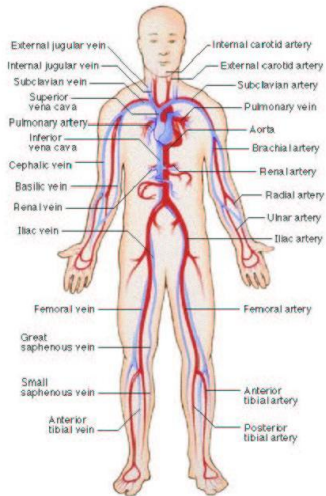


Quelle: de.wikipedia.org

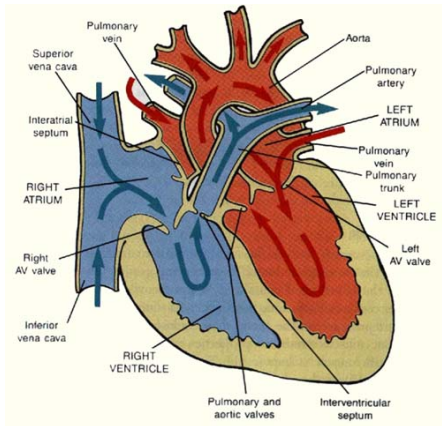


Quelle: static.ddmcdn.com

Kreislaufsystem



Quelle: [2]



Quelle: med.mui.ac.ir

Kreislaufsystem: Verzweigung und Dimensionen

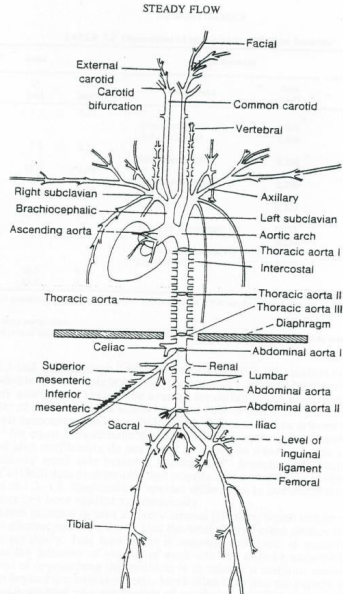


Fig. 2.19. Reprinted with permission from D. A. McDonald, *Blood Flow in Arteries*. Edward Arnold, London, 1974. Diagram of the major branches of the arterial tree in the dog. Drawing is to scale, but the scale of diameters is double the scale of lengths.

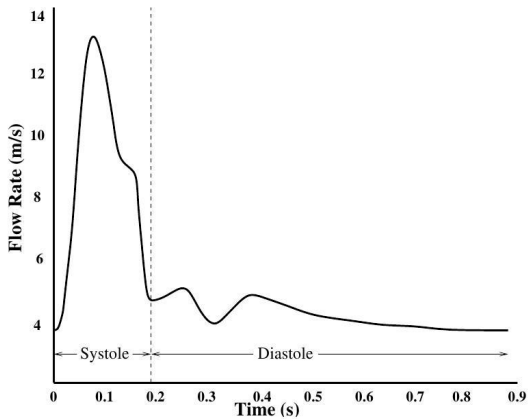
Kreislaufsystem: Verzweigerung und Dimensionen

Quelle: [3]

TABLE 2.3. Model of vascular dimensions in 20-kg dog

Class Number	Vessels	Mean Diameter (mm)	Number of Vessels	Mean Length (mm)	Total Cross Section (cm ²)	Total Volume (ml)	Total Blood Volume
Systemic							
1	Aorta	(19-4.5)	1		(2.8-0.2)	60	} 11%
2	Arteries	4.000	40	150.0	5.0	75	
3	Arteries	1.300	500	45.0	6.6	30	
4	Arteries	0.450	6,000	13.5	9.5	13	
5	Arteries	0.150	110,000	4.0	19.4	8	
6	Arterioles	0.050	2.8×10^6	1.2	55.0	7	} 5%
7	Capillaries	0.008	2.7×10^9	0.65	1,357.0	88	
8	Venules	0.100	1.0×10^7	1.6	785.4	126	} 67%
9	Veins	0.280	660,000	4.8	406.4	196	
10	Veins	0.700	40,000	13.5	154.0	208	
11	Veins	1.800	2,100	45.0	53.4	240	
12	Veins	4.500	110	150.0	17.5	263	
13	Venae cavae	(5-14)	2		(0.2-1.5)	92	
						1406	
Pulmonary							
1	Main artery	1.600	1	28.0	2.0	6	} 3%
2	Arteries	4.000	20	10.0	2.5	25	
3	Arteries	1.000	1,550	14.0	12.2	17	
4	Arterioles	0.100	1.5×10^6	0.7	120.0	8	} 4%
5	Capillaries	0.008	2.7×10^9	0.5	1,357.0	68	
6	Venules	0.110	2.0×10^6	0.7	190.0	13	} 5%
7	Veins	1.100	1,650	14.0	15.7	22	
8	Veins	4.200	25	100.0	35	6	
9	Main veins	8.000	4	30.0		6	
						200	
Heart							
	Atria		2			30	} 5%
	Ventricles		2			54	
						84	
						1690	100%

Charakteristisches Volumenfluß in großer Arterie



Quelle: [2]

Kreislaufsystem: Skalen und Phänomene

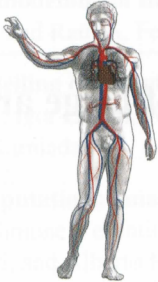

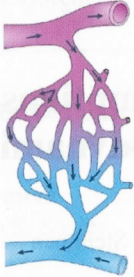
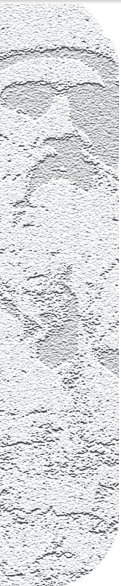
	Macrocirculation	Individual Arteries	Microcirculation
			
Compliance	++	??	--
Geometry	--	++	--
Rheology	--	??	++

Fig. 1.1. Representation of the relative importance of various factors in models of the different hemodynamic scales: ++ indicates primary importance; – indicates secondary or negligible importance; ?? indicates potential or unclear importance (taken from Creative Commons)

Quelle: Q., Ambrozzi, Rozza (Eds.): Modeling of Physiological flows, Vol.5



I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem

Physiologische Angaben

II. Strömungsmodelle für Blut

Poiseuille-Strömung

Navier-Stoksches Gleichungssystem

III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)

Mechanische Eigenschaften des Gefäßes

Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)

Modelle für dicke Wände (thick structure)

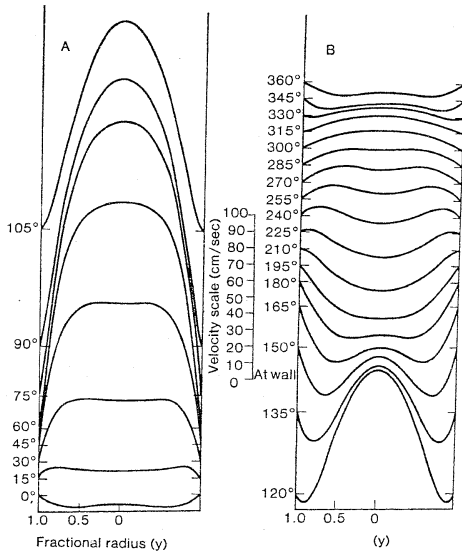
IV. Koppelung des Fluides und der Struktur

Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung

Numerische Algorithmen

V. Themen zum Abschlusskolloquium

Pulsierende Strömung



Quelle: [3]

Pulsierende Strömung

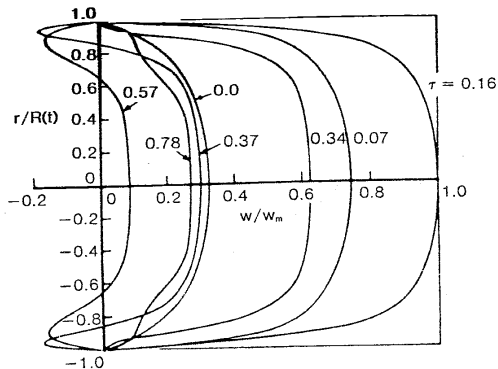


Fig. 5.12. Reprinted with permission from S. C. Ling, H. B. Atabek, W. G. Letzing, and D. J. Patel. *Circulation Research* 33: 198-212, 1973. Velocity profile in the descending thoracic aorta of an anesthetized dog. Ordinate, radial position as a fraction of the lumen radius; abscissa, ratio of velocity to maximum center line velocity, w_m . Profiles for seven different instants in the cardiac cycle are shown, identified by numbers indicating $\tau = t/T$, where T is the cardiac period.

Quelle: [3]

Pulsierende Strömung

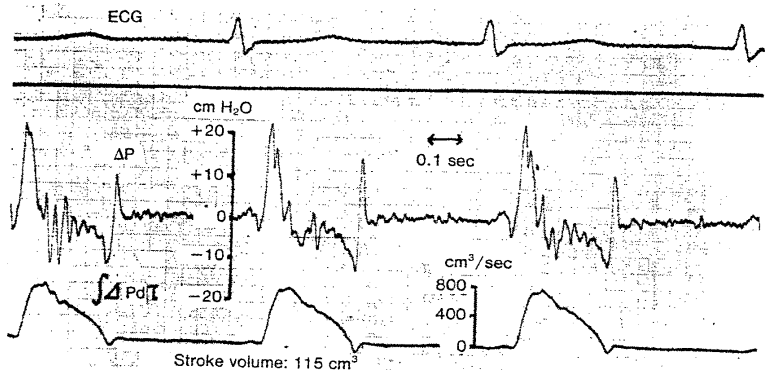
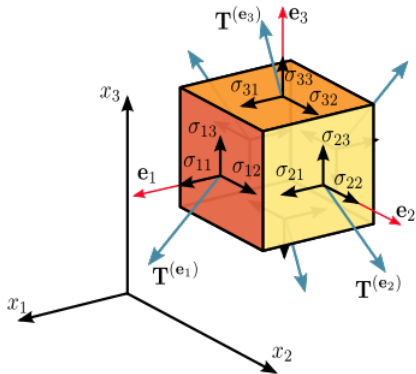


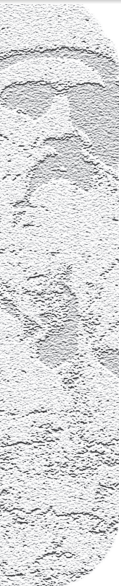
Fig. 5.8. Reprinted with permission from B. Rudewald. *Acta Physiologica Scandinavica* 54: Suppl., 187, 1962. Aortic blood flow computed from pressure gradient ($\Delta x = 7.3$ cm) in human thoracic aorta. From above downward: electrocardiogram, pressure gradient (ΔP), computed aortic blood flow.

Quelle: [3]

Cauchy Spannungstensor

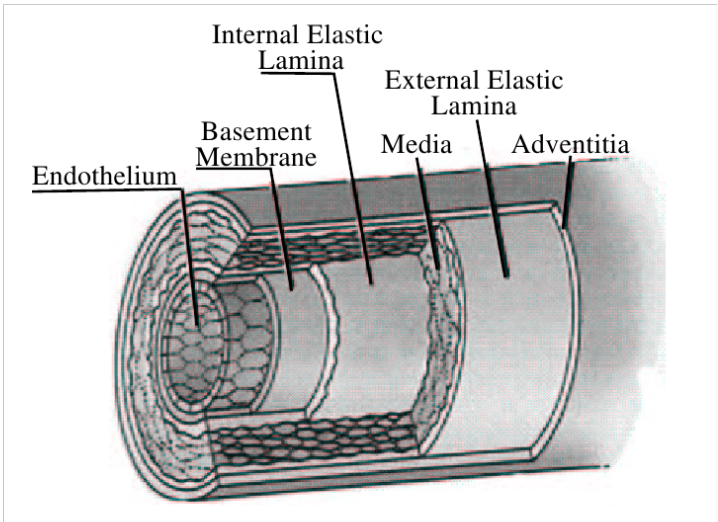


Quelle: wikipedia



- I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem
 Physiologische Angaben
- II. Strömungsmodelle für Blut
 Poisueille-Strömung
 Navier-Stoksches Gleichungssystem
- III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)
 Mechanische Eigenschaften des Gefäßes
 Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)
 Modelle für dicke Wände (thick structure)
- IV. Koppelung des Fluides und der Struktur
 Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung
 Numerische Algorithmen
- V. Themen zum Abschlusskolloquium

Struktur der Gefäßwand



Quelle: [2]

TABLE 4.1. Relationships among elastic constants

Constant	Definition in Terms of Stress and Strain	Equivalent Expressions for Isotropic Body
Young's modulus	$E_{xx} = \frac{S_{xx}}{e_{xx}}$	$E = 2\mu(1 + \sigma)$
Shear modulus, or modulus of rigidity	$\mu_{xy} = \frac{S_{xy}}{e_{xy}}$	$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$
Bulk modulus	$B = \frac{PV_0}{\Delta V}$	$B = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$
Longitudinal loading modulus	$\lambda = \frac{S_{yy}}{e_{xx}}$	$\lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}$
Poisson's ratio	$\sigma_{xy} = -\frac{e_{yy}}{e_{xx}}$	$\sigma = \frac{3B - 2\mu}{2(3B + \mu)}$

Quelle: [3]

Viskoelastizität

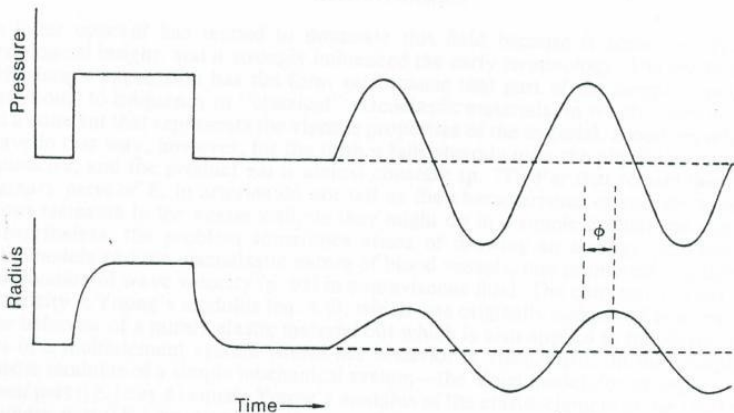


Fig. 4.4. Diagram of pressure and diameter in a viscoelastic tube. A sudden increment of pressure causes a gradual increase of radius. The radius eventually reaches a steady state, and the static elastic modulus can then be calculated from the increments of pressure and radius. When the pressure is lowered again, the radius gradually returns to its baseline. An imposed sinusoidal pressure produces radial oscillations at the same frequency (after an initial period of adjustment), but radius lags pressure by a phase angle ϕ , and peak distention is less than the maximum produced by the previous step function of pressure. In calculating the amplitude of the complex viscoelastic modulus, the amplitude of the pressure oscillation takes the place of ΔP in equation 4.11, and the amplitude of the radial excursions takes the place of ΔR .

MODELLING THE CARDIOVASCULAR SYSTEM

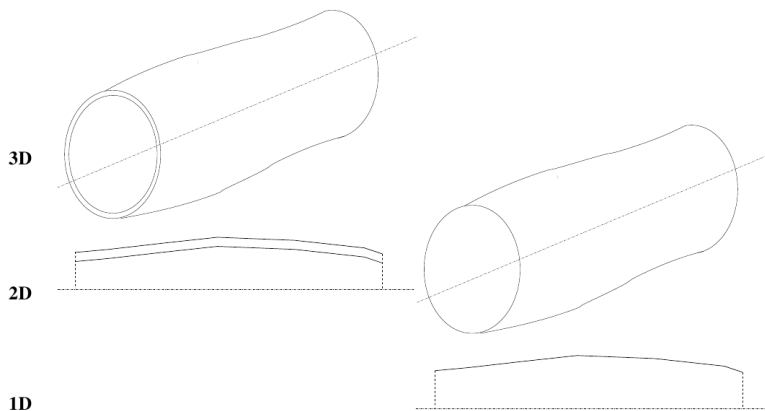
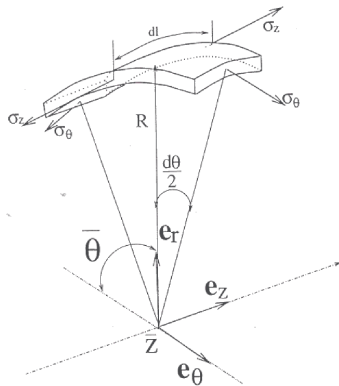
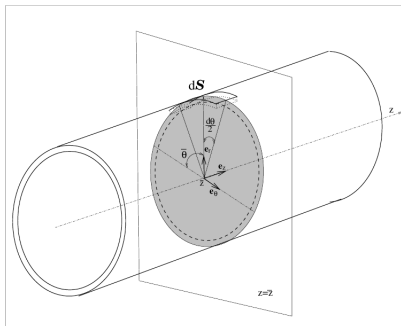


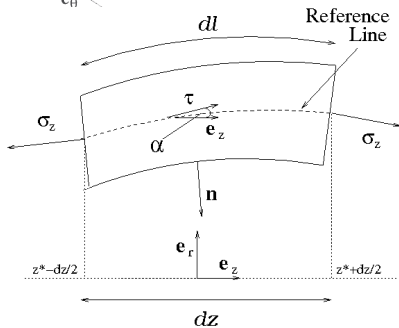
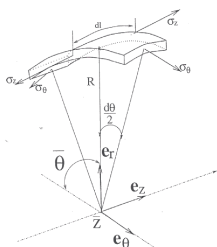
FIGURE 14. Different models for arterial wall mechanics

Koiter-Shell Model: Wandausschnitt

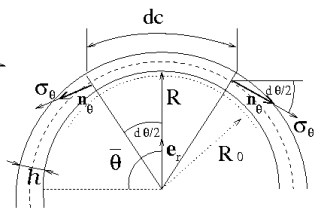


Quelle: [2]

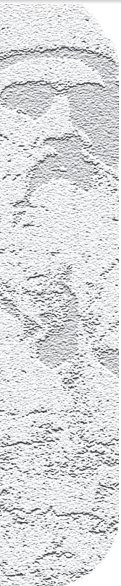
Koiter-Shell Model: Kräfte an die Oberflächen



Quelle: [2] Longitudinal Section

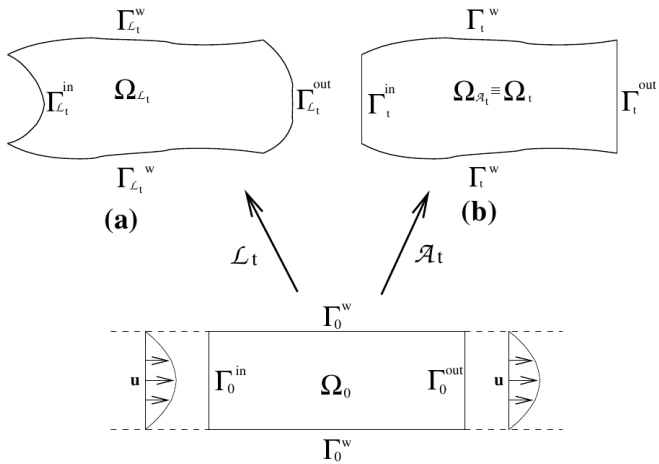


Transversal Section



- I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem
Physiologische Angaben
- II. Strömungsmodelle für Blut
Poiseuille-Strömung
Navier-Stoksches Gleichungssystem
- III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)
Mechanische Eigenschaften des Gefäßes
Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)
Modelle für dicke Wände (thick structure)
- IV. Koppelung des Fluides und der Struktur
Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung
Numerische Algorithmen
- V. Themen zum Abschlusskolloquium

ALE Abbildung



Quelle: [2]

Einfaches FSI-Problem

$$\mathbf{u}|_{\Gamma^0} = \mathbf{0}, \quad t \in I.$$

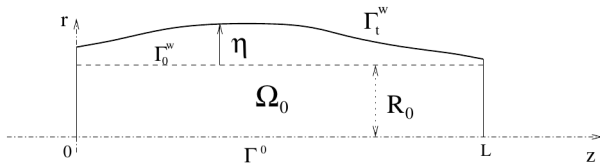


FIGURE 22. A simple fluid-structure interaction problem.

Quelle: [2]

ALE Abbildung des Gitters

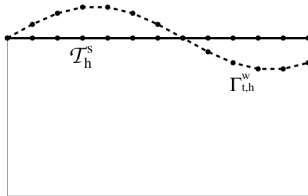


FIGURE 23. Position of the discretised vessel wall corresponding to a possible value of η_h .

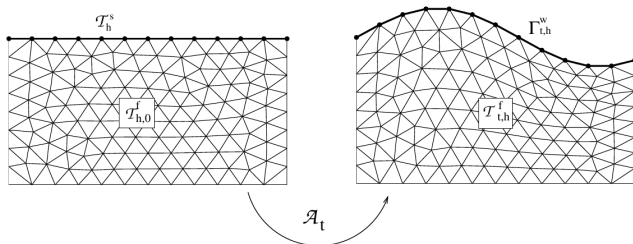
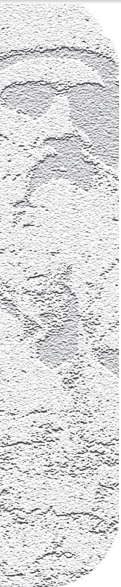


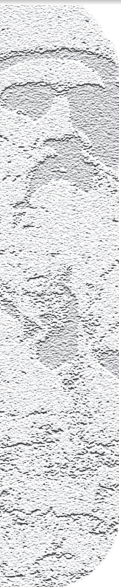
FIGURE 24. The triangulation used for the fluid problem at each time t is the image through a map \mathcal{A}_t of a mesh constructed on Ω_0 .



Harmonische Verlängerung der Randdeformation: Finde

$$y_h(Y_{i,j}) \approx y(Y_{i,j}), \quad Y_{i,j} \in \tau_{t,h}^f$$

$$\begin{aligned} \Delta y_h &= 0 && \text{auf } \Omega_0 \\ y &= \eta_h^{k+1} && \text{auf } \Gamma_w^0 \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0 \end{aligned}$$



Harmonische Verlängerung der Randdeformation: Finde

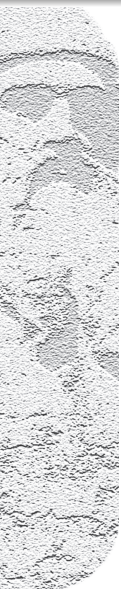
$$y_h(Y_{i,j}) \approx y(Y_{i,j}), \quad Y_{i,j} \in \tau_{t,h}^f$$

$$\begin{aligned} \Delta y_h &= 0 && \text{auf } \Omega_0 \\ y &= \eta_h^{k+1} && \text{auf } \Gamma_w^0 \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y_h(Y_{i,j}) = \mathcal{A}_{t^{k+1}}(Y_{i,j})$$

bestimmt neue Position in Zeit t^{k+1} für jedes Gitterpunkt

$$Y_{i,j} \in \tau_{t^{k+1},h}^f.$$



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \xi \quad \text{auf } \Gamma_w^0$$

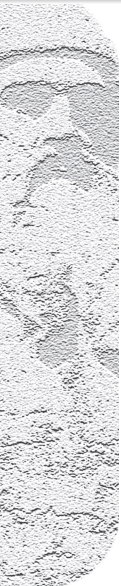
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + b\eta - c \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} = H$$

+ Rand/Anfangsbedingungen

Zeitdiskretisierung: $\eta^k \approx \eta(t^k, \cdot)$, $\xi^k \approx \xi(t^k, \cdot)$:

$$\frac{\eta^{k+1} - \eta^k}{\Delta t} = \frac{1}{2}\xi^k + \frac{1}{2}\xi^{k+1} \quad \text{auf } \Gamma_w^0$$

$$\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 (\eta^{k+1} + \eta^k)}{\partial x_1^2} + \frac{b}{2} (\eta^{k+1} + \eta^k) - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 (\xi^{k+1} + \xi^k)}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} (H^{k+1} + H^k)$$



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \xi \quad \text{auf } \Gamma_w^0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + b\eta - c \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} = H$$

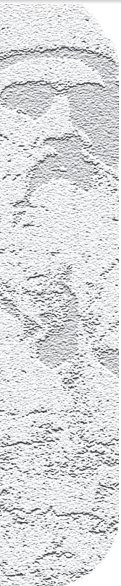
+ Rand/Anfangsbedingungen

Zeitdiskretisierung: $\eta^k \approx \eta(t^k, \cdot)$, $\xi^k \approx \xi(t^k, \cdot)$:

$$\frac{\eta^{k+1} - \eta^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \xi^k + \frac{1}{2} \xi^{k+1} \quad \text{auf } \Gamma_w^0$$

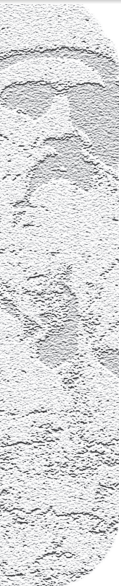
$$\frac{\xi^{k+1} - \xi^k}{\Delta t} - \frac{a}{2} \frac{\partial^2 (\eta^{k+1} + \eta^k)}{\partial x_1^2} + \frac{b}{2} (\eta^{k+1} + \eta^k) - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 (\xi^{k+1} + \xi^k)}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} (H^{k+1} + H^k)$$

Raumdiskretisierung $\eta_h^k = \sum_{i=1}^n \eta_i N_i(y)$, $y \in \Gamma_w^0 \dots$



Finde $\mathbf{u}_h^{k+1} \in V_{h,t^{k+1}}$ und $p_h^{k+1} \in P_{h,t^{k+1}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_{t^{k+1}}} \mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \tilde{\varphi} - \int_{\Omega_{t^{k+1}/2}} (\mathbf{u}_{\text{grid}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \tilde{\varphi} + \int_{\Omega_{t^{k+1}}} (\mathbf{u}_h^k \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \tilde{\varphi} \\ & - \int_{\Omega_{t^{k+1}/2}} \text{div} \mathbf{u}_{\text{grid}} \mathbf{u}_h^{k+1} \cdot \tilde{\varphi} + \int_{\Omega_{t^{k+1}}} \text{div} \tilde{\varphi} p_h^{k+1} + 2\nu \int_{\Omega_{t^{k+1}}} D(\mathbf{u}_h^{k+1}) : D(\tilde{\varphi}) \\ & \int_{\Gamma_{\text{out}}} \mathbf{P}_{\text{out}} \mathbf{n} \cdot \tilde{\varphi} + \nu \int_{\Gamma_0} (\partial_{x_1} \mathbf{u}_2 + \partial_{x_2} \mathbf{u}_1) \tilde{\varphi}_1 \mathbf{n}_2 = \int_{\Omega_{t^{k+1}}} \mathbf{f}^{k+1} \cdot \tilde{\varphi} + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_{t^k}} \mathbf{u}_h^k \cdot \tilde{\varphi} \\ & \int_{\Omega_{t^{k+1}}} \text{div} \mathbf{u}_h^{k+1} \tilde{\pi} = 0 \quad \forall \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\mathcal{A}_{t^{k+1}}^{-1}(y)) \in \tilde{V}_h^0, \\ & \quad \quad \quad \forall \tilde{\pi} = \tilde{\pi}(\mathcal{A}_{t^{k+1}}^{-1}(y)) \in \tilde{P}_h, \\ & \mathbf{u}_h^{k+1} = \mathbf{g}^{k+1} \quad \text{auf } \Gamma_{\text{in}}, \quad \mathbf{u}_h^{k+1} = \xi_h^{k+1}(\mathcal{A}_{t^{k+1}}^{-1}(y)) \mathbf{e}_r \quad \text{auf } \Gamma_w^{t^{k+1}} \\ & \tilde{V}_h^0 = \{ \tilde{\varphi} \in \tilde{V}_h, \tilde{\varphi} = 0 \text{ auf } \Gamma_{\text{in}} \cup \Gamma_w^0, \tilde{\varphi}_2 = 0 \text{ auf } \Gamma_0 \} \end{aligned}$$

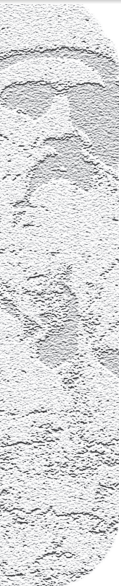


Falls $\tilde{\varphi} \in \tilde{V}_h$ ($\tilde{\varphi} \neq 0$ auf Γ_w^0): \rightarrow zusätzliche Randterme

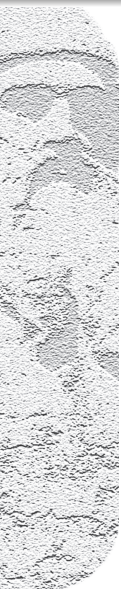
$$\text{(Residuum)} \mathcal{R}_h^{k+1} := \int_{\Gamma_w^{k+1}} 2\nu D(\mathbf{u}_h^{k+1}) \tilde{\varphi} \mathbf{n}.$$

Dann:

$$H \approx \frac{\rho_w h}{\rho} \frac{1}{2} (\mathcal{R}_h^{k+1} + \mathcal{R}_h^k)$$



- I. Blut, Gefäß, Kreislaufsystem
 Physiologische Angaben
- II. Strömungsmodelle für Blut
 Poisueille-Strömung
 Navier-Stoksches Gleichungssystem
- III. Mechanik des Gefäßes (Ausflug in die Mechanik der Festkörper)
 Mechanische Eigenschaften des Gefäßes
 Koiter-Shell Modell für dünne Wände (thin shell)
 Modelle für dicke Wände (thick structure)
- IV. Koppelung des Fluides und der Struktur
 Mathematische Formulierung (ALE), schwache Lösung
 Numerische Algorithmen
- V. Themen zum Abschlusskolloquium



- 1 Zusammenfassung der hämodynamischen Modellierung:
typische medizinische Gegebenheiten und auftretende Schwierigkeiten bei der Modellierung.
- 2 Numerische Simulation der Fluidströmung:
parabolisches Geschwindigkeitsprofil der Newtonschen Fluide versus Geschwindigkeitsprofil der nicht-Newtonischen Fluide, stationäre versus pulsierende Strömung.
- 3 Num. Simulation der Fluid-Struktur Wechselwirkung
Anwendung von 1D oder 2D "thick-structure" Modells für die (linear-) elastische Gefäßwände, physiologische Daten
- 4 Lagrange-Eulersche Ansatz (ALE Formulierung)
bei der Modellierung der Strömung in beweglichen Gebieten.
- 5 Mathematische Formulierung des gekoppelten FSI Problems und die schwache Formulierung dieses Systems.
- 6 Iteratives Algorithmus zur numerischen Lösung des gekoppelten FSI Problems, auch Übersicht der Verfahren.