6. Legendre-Formel

1) Nullstellen der Legendre-Polynome $P_k(x)$; $k = 0, 1, \ldots, m$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_1, x_2, \ldots, x_m}$

Knoten der Gauß-Regel

2) $$w_i = \left(\sum_{k=0}^{m-1} P_k^2(x_i) \right)^{-1}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

Gewichte der Gauß-Regel

Beispiel

- $m = 1$ $\qquad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

Nullstelle

$$w_1 = \left(P_0^2(0)\right)^{-1} = \boxed{2}$$

$\Rightarrow G_1[f] = 2\, f(0)$

Mittelpunkt-Regel

• $m = 2$ $\qquad P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}} \quad \ldots \text{ Nullstellen}$$

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{G_2[f] = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})}$$

2-te Gauß-Regel

• $m = 3$ $\qquad P_3(x) = \frac{\sqrt{35}}{3}\left(\sqrt{\frac{45}{8}}x^3 - \sqrt{\frac{41}{40}}x\right)$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{15}}{5} \qquad x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$w_1 = w_3 = 5/9 \qquad w_0 = 8/9$$

$$\underline{G_3[f] = \frac{5}{9}f\left(\frac{-\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)}$$

3-te Gauß-Regel

... Weiter? <u>kompliziert</u>

keine geschlosse Darstellung

m ... groß <u>keine geschlossen</u> Darstellung

- <u>numerisch</u> bestimmen !

Def. der Legendre-Polynome: Rekursive-Formel:

$$\beta_{n+1} P_{n+1} = x P_n - \beta_n P_{n-1}$$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

$\Downarrow$

$n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

<u>Gleichungssystem</u>

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \cdots & & & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & & & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \beta_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \beta_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$- \beta_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_m(x) \end{pmatrix}$$

4)

Wir suchen Nullstellen von P_m.

Sei x : $P_m(x) = 0 \Rightarrow$

$$B_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ P_m(x) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \checkmark$$

(1) $\Rightarrow$ Eigenwert-Aufgabe

$$\boxed{J_m \cdot \underline{y} = x \cdot \underline{y}} \qquad (2)$$

Für gegebene Matrix J_m suchen wir $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), so dass (2) gilt.

$\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ ... Eigenvektor

$x \in \mathbb{R}$ ... Eigenwert

$J_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ... Jacobi-Matrix

Berechnung der Nullstellen $P_m(x)$ $\Longrightarrow$ Berechnung der Eigenwerte von J_m

einfacher

• y_i … Eigenvektor für x_i

$i = 1, 2, \dots, m$

$$\Rightarrow \quad y_i = c\left[P_0(x_i), \dots, P_{m-1}(x_i)\right] \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$w_i = 2\,\frac{(y_i\, e_1)^2}{\|y_i\|^2} \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

→ Gauß-Formel

- **Radau-Formel** $R_m[\cdot]$

$$\tilde{\mathcal{J}}_m = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{m-1} \\ 0 & 0 & & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathcal{J}}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $\alpha_m \in \mathbb{R}$

- Eigenwerte $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}$
- Eigenvektoren $\tilde{y}_i \in \mathbb{R}^m$

- Radau-Quadraturformel

$$R_m[f] \equiv \sum_{i=1}^{m} \tilde{w}_i \, f(\tilde{x}_i)$$

$$\tilde{w}_i = 2 \, \frac{(\tilde{y}_i \, e_1)^2}{\| \tilde{y}_i \|^2}$$

Bemerkung:
$\forall \alpha_m \in \mathbb{R}$ x_i sind verschiedene Nullstellen von $p_m \in \mathbb{P}_m$; $I[p_m q] = 0$; $\forall q \in \mathbb{P}_{m-2}$

$$\boxed{p_m(x) = \beta_m P_m(x) - \alpha_m P_{m-1}(x)}$$

Satz 3. $R_m[\cdot]$ ist exakt für $\forall p \in \mathcal{P}_{2m-2}$. Daher $\boxed{q = 2m-2}$.

Beweis: Analog wie für $G_m[\cdot]$. ∎

* Speziel für Radau-Regel $\boxed{\alpha_m = \frac{m}{2m-1}}$

Satz 4. (Radau-Formel)

Es gibt genau eine Quadraturformel, so dass

$$\boxed{q = 2m-2}$$

und einer der Knoten $\boxed{x_i = 1}$ ist.

Das ist $R_m[\cdot]$ mit $\boxed{\alpha_m = \frac{m}{2m-1}}$.

<u>Beweis:</u>

1) Knoten von $R_m[\cdot]$ sind Nullstellen von

$$p_m(x) = \beta_m P_m(x) - \alpha_m P_{m-1}(x)$$

Sei $x = 1$; $\alpha_m = \frac{m}{2m-1}$ (wir wissen: $P_m(1) = \sqrt{\frac{2m+1}{2}}$)

$$p_m(1) = \beta_m \frac{\sqrt{2m+1}}{\sqrt{2}} - \alpha_m \frac{\sqrt{2m-1}}{\sqrt{2}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = 1}}$ ist Nullstelle ✓

2) Sei $Q_m[\cdot]$ eine Quadratur mit $q = 2m-2$. Dann

$$\omega = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) \in P_m$$

$$I[\omega p] = Q[\omega p] = 0 \quad \forall p \in P_{m-2}$$

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k P_k(x)$$

$$0 = I[\omega \cdot P_j] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \, I[P_k P_j] = \alpha_j$$

$$j = 0, 1, \dots, m-2$$

$\Rightarrow$

$$\omega(x) = a P_m(x) + b P_{m-1}(x); \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$= \gamma \big(\underbrace{\beta_m P_m(x) - \alpha P_{m-1}(x)}_{p_m(x)} \big) \qquad \gamma, \alpha \in \mathbb{R}$$

Falls $\alpha = \alpha_m \Rightarrow [\omega(x) = 0 \Leftrightarrow p_m(x) = 0]$

$\Rightarrow$ Knoten sind gerade Nullstellen vom $p_m(x)$ ✓

$\Rightarrow$ Knoten sind Eigenwerte von $\tilde{J}_m$ mit $\alpha = \alpha_m$.

$\Rightarrow$ Eindeutig Radau-Formel

$\boxed{\text{QED}}$

Beispiel

- $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2f(1) = R_1[f]$$

  erste Radau-Formel

  $$q = 2m-2 = 0$$

- $$R_2[f] = \frac{3}{2} f(-1/3) + \frac{1}{2} f(1)$$

  $$q = 2m-2 = 2$$