Strukturbildung

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Chemie:

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Chemie:

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Chemie:

Motivation

- Strukturen sind überall

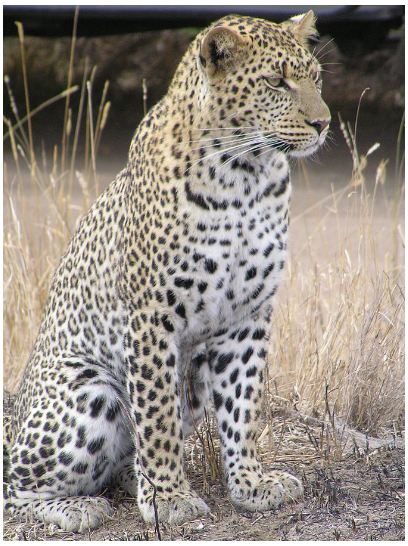
  ### Biologie:

By Dawson at English Wikipedia - Transferred from en.wikipedia to Commons., CC BY-SA 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2663216 (https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2663216)

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Biologie:



By JanErkamp at the English language Wikipedia, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2003639 (https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2003639)

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Fluidmechanik:

Motivation

- Strukturen sind überall

  ### Astronomie:

By NASA; ESA; G. Illingworth, D. Magee, and P. Oesch, University of California, Santa Cruz; R. Bouwens, Leiden University; and the HUDF09 Team [Public domain or Public domain], via Wikimedia Commons

Motivation

- Strukturen sind überall
  - Chemie
  - Biologie
  - Fluiddynamik
  - Astronomie
  - ...

Motivation

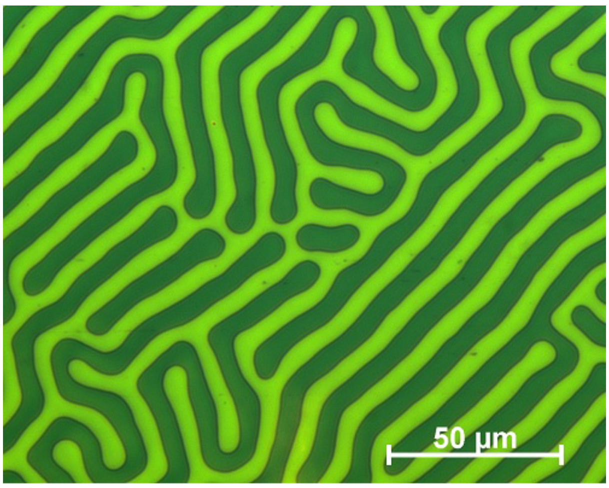
- Eigentlich erstaunlich, denn
  - Strukturen sind *geordnet*
  - Ordnung ist unwahrscheinlicher als Unordnung (**Entropie**)
  - Ordnung aufrechtzuerhalten *kostet etwas*

⇒ Strukturbildung anscheinend **Nicht-Gleichgewichtsphänomen**

Universalität

- Beobachtung: sehr *unterschiedliche* Systeme können *qualitativ gleiche* Muster haben

Photo: Tambako The Jaguar/Flickr

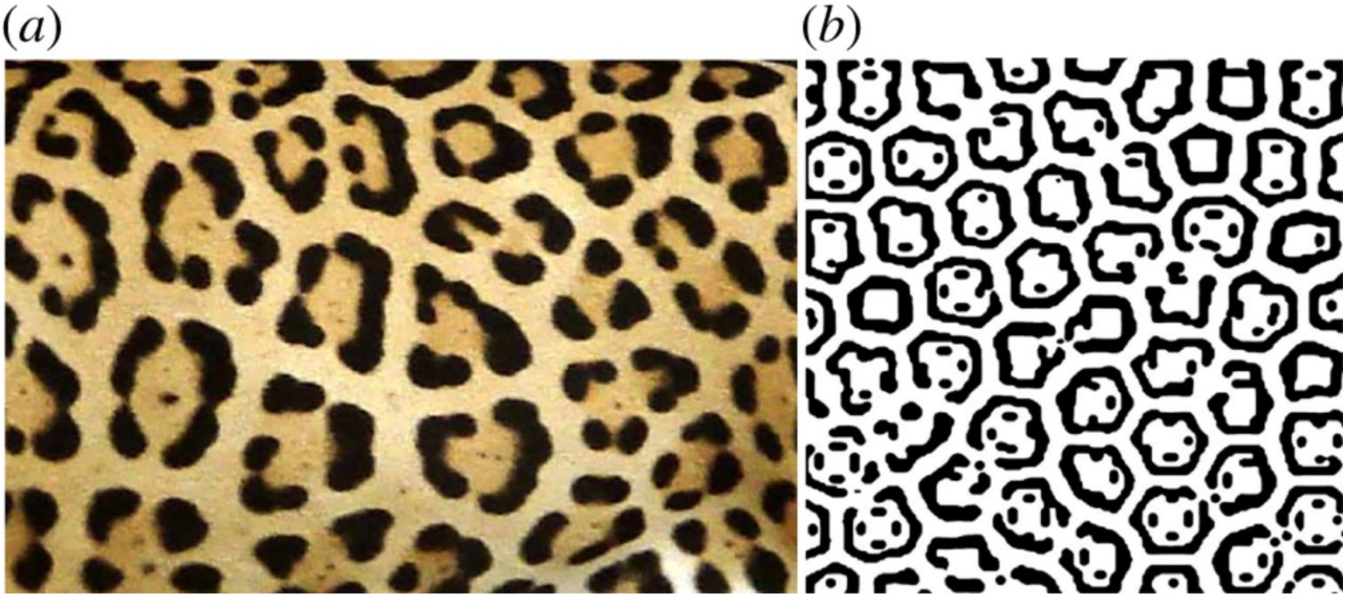


By Matesy GmbH - Own

work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=16981509

Universalität

- Beobachtung: sehr *unterschiedliche* Systeme können *qualitativ gleiche* Muster haben



Liu RT, Liaw SS, Maini PK. 2006 Two-stage Turing model for generating pigment patterns on the leopard and the jaguar. Phys. Rev. E 74, 011914. """)

Universalität

- Beobachtung: sehr *unterschiedliche* Systeme können *qualitativ gleiche* Muster haben
- Verhalten der Systeme beschriben durch sehr unterschiedliche Systeme nichtlinearer partieller Differentialgleichungen
- Sehr unterschiedliche nichtlineare DGL-Systeme mit sehr ähnlichen Strukturen als Lösung

⇒ *Tief drinnen in vielen nichtlinearen DGL-Systemen steckt eine einfachere Gleichung, die raus will!*

Methoden

- Wie findet man '*einfachere*' Gleichungen, die Strukturen beschreiben?
- Aktives Forschungsfeld, keine allgemeine erschöpfende Lösung bekannt
- Aber: viele Ansätze, die
  - oft funktionieren
  - partielle Information über die möglichen Muster liefern

Turing-Muster

- Viele natürliche Strukturen erstaunlich komplex und dennoch (fast) regelmässig
- Welche Mechanismen können so etwas produzieren?
- Beispiel:
  - Musterung von Zebra, Leopard, ... durch unterschiedliche Pigmentkonzentrationen
  - Genom enthält Bauplan für Proteine, keine Anweisungen wie "Forme Kreis aus schwarzem Pigment"

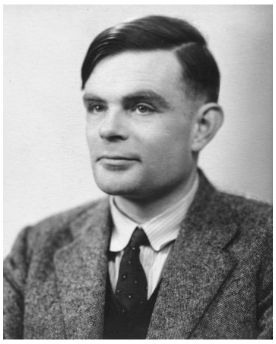
Turing-Muster

- Viele natürliche Strukturen erstaunlich komplex und dennoch (fast) regelmässig
- Welche Mechanismen können so etwas produzieren?

- Wie so vieles andere verdankt die Welt die Beantwortung der Informatik

Turing-Muster

- Viele natürliche Strukturen erstaunlich komplex und dennoch (fast) regelmässig
- Welche Mechanismen können so etwas produzieren?
- Wie so vieles andere verdankt die Welt die Beantwortung der Informatik
- oder zumindest einem Informatiker:



Turing-Muster

- Turings Paper "The Chemical Basis of Morphogenesis" begründet Forschung zur Strukturbildung
- Basiert auf einfachem theoretischen Modell für Reaktion zweier Moleküle
- Reaktionen beschrieben durch **Reaktions-Diffusions-Gleichungen**
- Beschreibt Konzentration der einzelnen Moleküle als Funktion von Ort und Zeit als Ergebnis von
  - Reaktion: Stoffe ineinander umgesetzt, beschrieben durch nichtlineare Funktionen
  - Diffusion: Stoffe dauernd in zufälliger thermische Bewegung, beschrieben durch Laplace-Operator

Turing-Muster

- Turing zeigt theoretisch, dass komplexe Strukturen durch einfache Wechselwirkung zweier Molekül-Spezies entstehen können
  - **Aktivator** - fördert Entstehung der Reaktanden (z.B. Pigment, ...)
  - **Inhibitor** - behindert Entstehung der Reaktanden

  wenn der Inhibitor viel schneller diffundiert als der Aktivator

A.M. Turing (1952): **"The Chemical Basis of Morphogenesis"**, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 237 (641): 37–72

Turing-Muster

- Modell-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \Delta u \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \Delta v \tag{2}$$

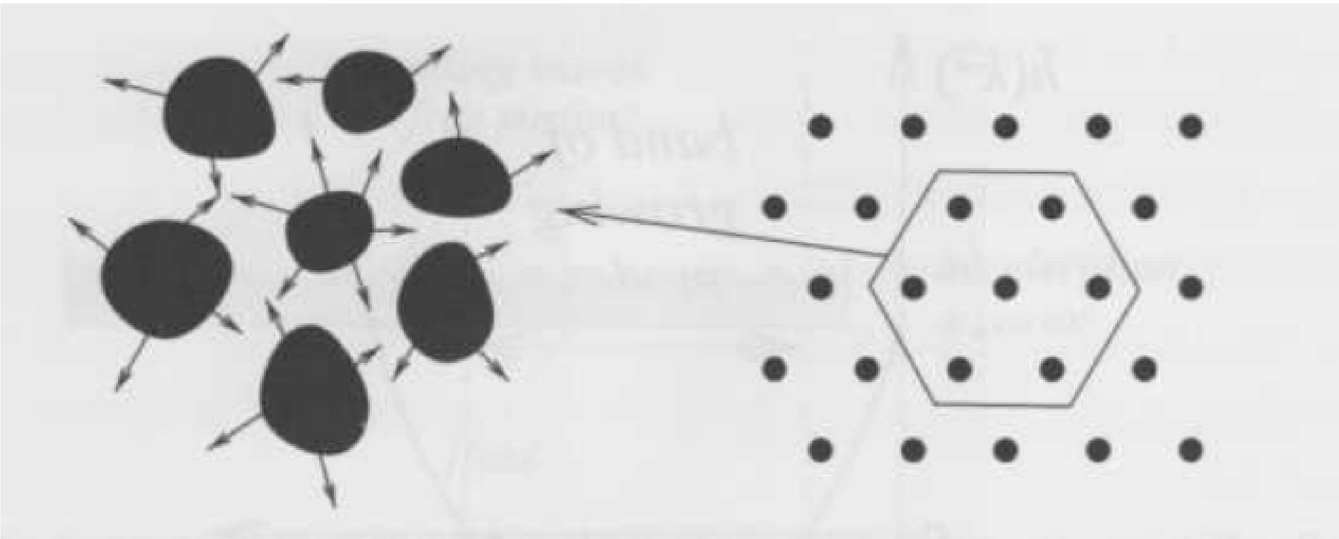
- Dabei sind
  - u Aktivatorkonzentration, $D_u > 0$ Diffusionskonstante des Aktivators
  - v Inhibitorkonzentration, $D_v \gg D_u$ Diffusionskonstante des Inhibitors
  - $f(u, v)$ Einfluss von u auf Produktion von u und v (Aktivator $\Rightarrow$ beide Ableitungen positiv)
  - $g(u, v)$ Einfluss von v auf Produktion von u und v

(Inhibitor ⇒ beide Ableitungen negativ)

Turing-Muster

- Wie führt dieses System zu Strukturen?
- Mechanismus bekannt als *local activation with lateral inhibition*
- System beginnt mit homogener, gleichbleibender Konzentration
- Leichte Störung bringt System aus dem Gleichgewicht

Turing-Muster



- Lokal zufällig höhere Aktivatorkonzentration ⇒ Aktivator und Inhibitor wachsen dort an
- Inhibitor diffundiert viel schneller, also:
  - lokal wird relative Aktivatorkonzentration verstärkt
  - Diffusion erhöht relative Inhibitorkonzentration in der Umgebung des lokalen Patches
  - Hohe Inhibitorkonzentration ⇒ keine Produktion, nur Inhibitor wird durch Diffusion aufgefüllt

        - Noch weiter weg kommt kaum Inhibitor an, zufällige lokale Aktivatorerhöhung kann hier wieder Patch aufbauen

Turing-Muster

- Bisher noch sehr '*hand-waving*'
- Wie kann man sowas systematisch studieren?
- Turings Idee:
    - raum-zeitliche Muster in makroskopischen Systemen entstehen aus **linearen Instabilitäten** homogener Systeme
    - zufällige Störungen können aus homogenem Zustand heraus stark anwachsen
    - je nachdem, welche Störungen wie wachsen, ergeben sich verschiedene Muster
    - $\Rightarrow$ Studium der linearen Instabilitäten erlaubt Verständnis möglicher Muster
    - Dazu brauchen wir ein wenig **Bifurkationstheorie**

Bifurkationstheorie

- Interessieren uns für die *Entstehung* von Mustern (*onset*)
- Dabei wird bisheriger homogener (periodischer, ...) Zustand des Systems durch Zustand mit Struktur ersetzt, da kleine Störungen stark anwachsen
- Stabilität des Zustands gegen Störungen meist abhängig von Parametern des Systems (Temperatur, Druck, ...)
- Notation:
    - **Ordnungsparameter x:** die Größe, in der die Strukturen auftreten

- **Kontrollparameter $\boldsymbol{\mu}$:** die Eigenschaften des Systems, die über Stabilität entscheiden

- Onset: Wert von $\boldsymbol{\mu}$, bei dem homogene Lösung für $\boldsymbol{x}$ instabil gegen Störungen wird

Bifurkationstheorie

- Brauchen gleich eine ganze Reihe von Konzepten und Definitionen
- Führen wir zur Vereinfachung ein an *gewöhnlicher nichtlinearer Differentialgleichung (ODE)*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

- f ist i.A. nichtlinear, aber wir nehmen an, dass es '*hinreichend glatt*' ist
- **Achtung:** Ausgangspunkt der Strukturbildung sind meist *partielle nichtlineare Differentialgleichungen (PDEs)*

Phasenraum und Fluss

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

- Der **Phasenraum** einer DGL ist der Raum möglicher Systemzustände (in (3): $\mathbb{R}^n$)
- (3) ist DGL 1. Ordnung ⇒ Verwenden **Anfangswert** $\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{x}(t = 0)$ zur Auswahl einer Lösung aus der Lösungsschar
- Der **Fluss** $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ der DGL ergibt sich aus den Lösungen durch

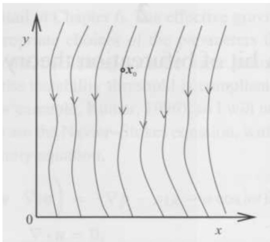
$$\boldsymbol{x}(t) = \phi(\boldsymbol{x}_0, t)$$

- ϕ indiziert Lösungen mit ihren Anfangswerten

Phasenportrait und Trajektorien

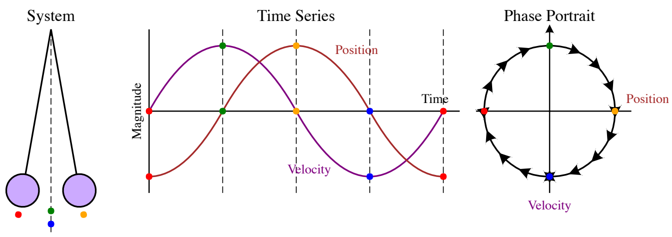
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

- Die **Trajektorie** zum Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$ parametrisiert die Lösung zu $\boldsymbol{x}_0$ nach der Zeit $(t \mapsto \phi(\boldsymbol{x}_0, t))$
- Das **Phasenportrait** ist die Menge aller Trajektorien im Phasenraum
- Ein Plot des Phasenportrait stellt mehrere Trajektorien als Linien im Phasenraum dar



Periodische Orbits

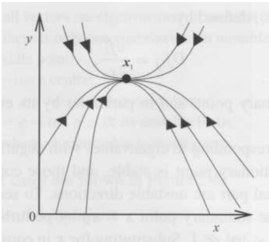
- Trajektorien können *geschlossen* sein
- Eine Trajektorie ist ein **geschlossener Orbit** mit Periode T, falls
  - $\phi(\boldsymbol{x}, t + T) = \phi(\boldsymbol{x}, t) \quad \forall t$
  - $\phi(\boldsymbol{x}, t + s) \neq \phi(\boldsymbol{x}, t) \quad \forall 0 < s < T$



By Krishnavedala (Own work) [CC BY-SA 4.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0))], via Wikimedia Commons

Stationäre Punkte

- Ein **stationärer Punkt** (auch *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtslösung*) der DGL (3) ist ein Punkt $\boldsymbol{x}$ mit
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$



Stationäre Punkte

- Warum interessieren uns stationäre Punkte?
- Werden gleich sehen, dass hier "interessante Dinge" mit dem Fluss passieren können ⇒ hier können Muster entstehen
- Diese Dinge hängen vom Phasenportrait in unmittelbarer Umgebung des stationären Punktes ab
- Haben f "glatt genug" vorausgesetzt ⇒ können Jacobi-Matrix von f betrachten, um mehr über Phasenportrait in der Nähe zu lernen

Stationäre Punkte

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

- Es sei $\boldsymbol{x}_0$ ein stationärer Punkt von (3)
$\Rightarrow \left.\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu})$
- Untersuchen nun die **lineare Stabilität** von $\boldsymbol{x}_0$ bezüglich kleiner Störung $\vec{\eta}$: $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\eta}(t), 0 < |\vec{\eta}(t)| \ll 1$

- Einsetzen in (3):

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{\eta}}{dt} = f(\vec{x}_0 + \vec{\eta}, \boldsymbol{\mu})$$

Stationäre Punkte

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = f(\vec{x}_0 + \vec{\eta}, \boldsymbol{\mu})$$

- Störung ist klein ⇒ betrachte Taylor-Entwicklung von f um $\vec{x}_0$:

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = f(\vec{x}_0, \vec{\mu}) + Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}\vec{\eta} + \mathcal{O}\left(|\eta|^2\right)$$

  wobei $Df_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ die Jacobi-Matrix von f bezeichnet
- $\vec{x}_0$ ist stationärer Punkt ⇒ $f(\vec{x}_0, \vec{\mu}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\eta}}{dt} = Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}\vec{\eta} + \mathcal{O}\left(|\eta|^2\right)$$

Stationäre Punkte

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}\vec{\eta} + \mathcal{O}\left(|\eta|^2\right)$$

- $\vec{\eta}$ bis jetzt kleine, sonst aber beliebige Störung von $\vec{x}_0$
- Betrachte nun den Fall: $\vec{\eta}$ ist Eigenvektor von $Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ zum Eigenwert λ
- Dann folgt:

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \lambda\vec{\eta} + \mathcal{O}\left(|\eta|^2\right)$$

- In linearer Ordnung gilt also:

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \lambda\vec{\eta} \Rightarrow \vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$$

mit $\vec{\eta}_0 := \vec{\eta}(t = 0)$

Stationäre Punkte

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \lambda\vec{\eta} \Rightarrow \vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$$

- Untersuchung der **linearen Stabilität** der Lösung $\vec{x}_0$ gegen Störung $\vec{\eta}$ unterscheidet drei Fälle:

  1. $\Re(\lambda) < 0 \Rightarrow |\vec{\eta}| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$:
     - Störung wird exponentiell gedämpft, stirbt ab
     - Stationärer Zustand $\vec{x}_0$ **stabil** gegen Störungen in Richtung $\vec{\eta}$
  2. $\Re(\lambda) = 0 \Rightarrow |\vec{\eta}|$ zeitunabhängig:
     - Störung wird nicht gedämpft, aber auch nicht verstärkt
     - Stationärer Zustand $\vec{x}_0$ **neutral stabil** gegen Störungen in Richtung $\vec{\eta}$
  3. $\Re(\lambda) > 0 \Rightarrow |\vec{\eta}| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$:
     - Störung wächst exponentiell an (Realität: bis zu Sättigung)
     - Stationärer Zustand $\vec{x}_0$ **instabil** gegen Störungen in Richtung $\vec{\eta}$

Stationäre Punkte

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \lambda\vec{\eta} \Rightarrow \vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$$

- Wir bezeichnen die Eigenwerte/-vektoren der Jacobi-Matrix von f an einem stationären Punkt $\vec{x}$ als "die Eigenwerte/-vektoren von $\vec{x}$"
- Wir nennen einen stationären Punkt $\vec{x}$

  1. **linear stabil** ⇔ alle Eigenwerte von $\vec{x}$ haben negativen Realteil
  2. **linear neutral stabil** ⇔ mindestens ein Eigenwert von $\vec{x}$ hat verschwindenden Realteil, kein Eigenwert hat positiven Realteil
  3. **linear instabil** ⇔ mindestens ein Eigenwert von $\vec{x}$ hat negativen Realteil

- Musterentstehung: Variation des Kontrollparameters ändert Stabilität von stationären Punkten

Charakterisierung stationärer Punkte

- Betrachten zur Anschauung stationären Punkt $\vec{x}_0$ im Phasenraum $\mathbb{R}^2$ ⇒ Jacobi-Matrix $Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2
- $\vec{x}_0$ kann in verschiedenen Stabilitätsklassen liegen:

  1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: **stabiler Knoten (node)**
  2. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ und

     2a. alle Vektoren sind Eigenvektoren: **stabiler Stern**
     2b. es gibt nur einen Eigenvektor: **improper stable node**
  3. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$: **instabiler Knoten**
  4. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ und

4a. alle Vektoren sind Eigenvektoren: **instabiler Stern**
4b. es gibt nur einen Eigenvektor: **improper unstable node*
5. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: **Sattelpunkt**

Charakterisierung stationärer Punkte

- Betrachten zur Anschauung stationären Punkt $\vec{x}_0$ im Phasenraum $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Jacobi-Matrix $Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ hat zwei Eigenwerte λ_1, λ_2
- $\vec{x}_0$ kann in verschiedenen Stabilitätsklassen liegen:

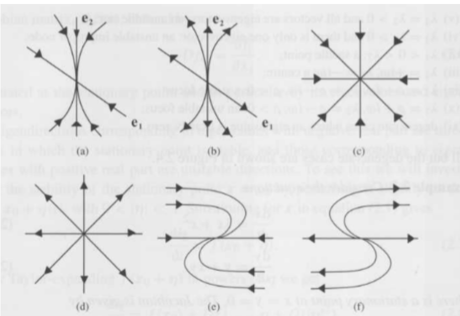
1. $\lambda_1 = +\mathrm{i}\omega, \lambda_2 = -\mathrm{i}\omega$: **Zentrum (centre)**
2. $\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega, \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega, \rho < 0$: **stabiler Fokus**
3. $\lambda_1 = \rho + \mathrm{i}\omega, \lambda_2 = \rho - \mathrm{i}\omega, \rho > 0$: **instabiler Fokus**
4. **degenerierte Fälle** mit $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$

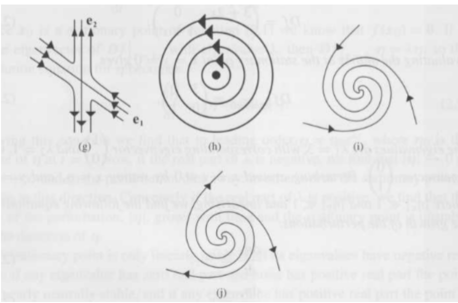
Charakterisierung stationärer Punkte

In [8]:

```
from IPython.core.display import HTML
HTML("""
<div>
<div class='img-box img-center'>
<div class='img-left'>
<img src="images/stability_classes_1.png" scale="60%"/>
</div>
<div class='img-right img-center'>
<img src="images/stability_classes_2.png" scale="60%"/>
</div>
</div>
</div>
""")
```

Out[8]:





Bifurkationen

- Ein stationärer Punkt $\vec{x}_0$ heißt **"hyperbolisch"** ⇔ kein Eigenwerte von $\vec{x}_0$ ist Null oder rein imaginär
- Ein hyperbolischer stationärer Punkt $\vec{x}_0$ heißt
    - **"Senke"** ⇔ alle Eigenwerte von $\vec{x}_0$ haben strikt negativen Realteil

- **"Quelle"** ⇔ alle Eigenwerte von $\vec{x}_0$ haben strikt positiven Realteil
- **"Sattelpunkt"** ⇔ $\vec{x}_0$ ist weder Senke noch Quelle

Bifurkationen

- Hyperbolische stationäre Punkte erhalten unter kleinen Störungen ihre Stabilitätseigenschaften
- Betrachte gestörte DGL

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) + \epsilon p(\vec{x}) \tag{4}$$

  mit glattem Vektorfeld p und $0 < \epsilon \ll 1$
- Einfach zu zeigen: (4) hat hyperbolischen Fixpunkt mit Distanz $\mathcal{O}(\epsilon)$ zu $\vec{x}_0$ und gleicher Stabilitätsklasse wie $\vec{x}_0$
- Musterentstehung:
  - kleine Veränderung des Kontrollparameters führt zu qualitativ starker Veränderung des Flusses / der Stabilität von Lösungen
  - Anzahl und Art von Fixpunkten und/oder periodischen Orbits ändert sich sprungartig
- Kann offenbar nicht an hyperbolischen Fixpunkten passieren!

Bifurkationen

- Wir suchen also nach Fixpunkten $\vec{x}_0$ und Werten $\vec{\mu}_c$, so dass
  - $\vec{x}_0$ stabil für $\mu < \mu_c$
  - $\vec{x}_0$ instabil für $\mu > \mu_c$ ⇒ neues Muster kann aus bisheriger stationärer Lösung herauswachsen

- Diese Stabilitätsänderung nennen wir **Bifurkation**, $\vec{\mu}_c$ nennen wir **Bifurkationspunkt**
- Etwas genauer: **lokale Bifurkationstheorie** untersucht Fluss-Änderungen nahe an stationären Punkten oder periodischen Orbits

Bifurkationen

- Wie finden wir Bifurkationen von stationären Punkten?
- Bifurkationen nur an nicht-hyperbolischen stationären Punkten möglich (sonst: Stabilitätsklasse bei kleiner Änderung von $\vec{\mu}$ nicht verändert)
- Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ üblicherweise abhängig von $\vec{\mu}_c$

⇒ Schema:

1. bestimme Fixpunkte der DGL durch Lösen von $f(\vec{x}, \vec{\mu}) = 0$
2. berechne Eigenwerte $\lambda_{i,j}$ von $Df|_{\vec{x}=\vec{x}_i}$ an allen Fixpunkten $\vec{x}_i$ als Funktion von $\vec{\mu}$
3. bestimme für alle Fixpunkte $\vec{x}_i$ Werte von $\vec{\mu}$, für die ein oder mehrere $\lambda_{i,j} = 0$

Bifurkationen - Beispiel

Betrachte Gleichungssystem

$$d_t x = \mu - x^2, \quad d_t y = -y, \quad x, y, \mu \in \mathbb{R}$$

- Fixpunkte $\vec{x}_0(\vec{\mu}) := \left(\pm\sqrt{\mu}, 0\right)$ für $\mu > 0$
- Jacobi-Matrix:

$$Df := \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Jacobi-Matrix am Fixpunkt:

$$Df|_{\vec{x}_0(\vec{\mu})} := \begin{pmatrix} \mp 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte der Jacobi-Matrix am Fixpunkt: -1 und $\mp 2\sqrt{\mu}$

Bifurkationen - Beispiel

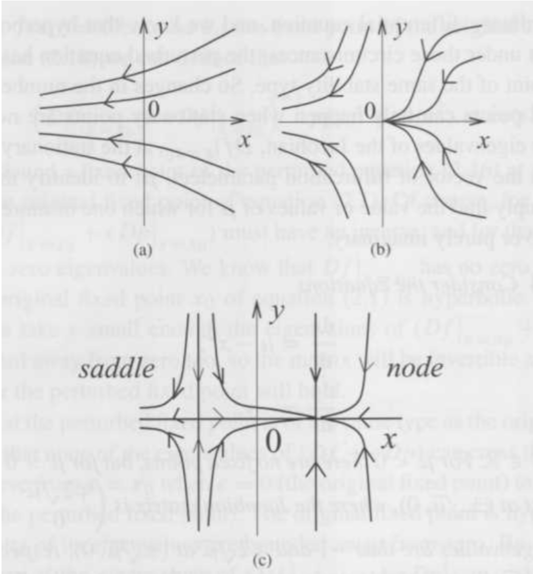
Betrachte Gleichungssystem

$$d_t x = \mu - x^2, \quad d_t y = -y, \quad x, y, \mu \in \mathbb{R}$$

- Eigenwerte der Jacobi-Matrix am Fixpunkt: -1 und $\mp 2\sqrt{\mu}$
- Also gilt:
  - Fixpunkt $(\sqrt{\mu}, 0)$ hat Eigenwerte -1 und $-\sqrt{\mu}$ $\Rightarrow$ hyperbolisch, stabiler Knoten für $\mu > 0$
  - Fixpunkt $(-\sqrt{\mu}, 0)$ hat Eigenwerte -1 und $+\sqrt{\mu}$ $\Rightarrow$ hyperbolisch, Sattelpunkt für $\mu > 0$
  - $\mu = 0$: Fixpunkt $(0, 0)$ hat Eigenwerte -1 und 0 $\Rightarrow$ nicht-hyperbolisch
- Qualitative Änderung:
  - $\mu < 0$: keine Fixpunkte
  - $\mu > 0$: ein stabiler und ein instabiler Fixpunkt

Bifurkationen - Beispiel

- Wir finden für $\mu > 0$ einen **stabilen Knoten** und einen **instabilen Sattelpunkt**
- Bekannt als **Saddle-node bifurcation**



(a) $\mu < 0$ (b) $\mu = 0$ (c) $\mu > 0$

Die Kodimension einer Bifurkation

- Kontrollparameter oft vektorwertig
- Bifurkation kann dann auf mehrdimensionalem Objekt auftreten, nicht nur an einem Punkt $\vec{\mu}_c$
- Beispiel: zweidimensionaler Kontrollparameter $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, Bifurkation auf der Linie $\mu_1 = 0$
- Die **Kodimension** einer Bifurkation ist die Differenz zwischen Größe des Parameterraums und Dimension des Objekts (Anzahl der Bifurkationsparameter die eingestellt werden müssen, um Bifurkation zu erreichen)
- Beispiel von oben: $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, Bifurkation bei $\mu_1 = 0$: Kodimension $2 - 1 = 1$

Zentrale Mannigfaltigkeit

- Reale Anwendungen: zugrundeliegende nichtlineare PDE-Systeme oft viel zu kompliziert um Fluss in der Nähe stationärer Punkte zu studieren

- Verschiedene Vereinfachungen möglich
- Eine ist die sogenannte **"Reduktion auf die zentrale Mannigfaltigkeit"**
- Beschränken uns dazu auf bisher **stabile** nicht-hyperbolische Fixpunkte, die Stabilität **verlieren**
- Solche Fixpunkte haben Eigenwerte mit Eigenwerten 0 (nicht-hyperbolisch) oder strikt negativ (stabil)
- Betrachten dann wieder System

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$$

Zentrale Mannigfaltigkeit

- **Erster Schritt:** trenne f in linearen und nichtlinearen Anteil:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = Df\big|_{(\vec{0},\vec{\mu})}\vec{x} + \vec{g}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad |g(\vec{x}, \vec{\mu})| \in \mathcal{O}(|\vec{x}|^2) \text{ für } |\vec{x}| \rightarrow$$

- **Beobachtung:** $Df\big|_{(\vec{0},\vec{\mu})}$ definiert drei Unterräume des Phasenrau
  - den **stabilen Unterraum** aufgespannt von Eigenvektoren mit Eigenwert mit negativem Realteil
  - den **instabilen Unterraum** aufgespannt von Eigenvektoren r Eigenwerten mit positivem Realteil
  - den **zentralen Unterraum** aufgespannt von Eigenvektoren m Eigenwerten mit verschwindendem Realteil
- Hier: $\vec{x}_0$ als bisher stabil vorausgesetzt: instabiler Unterraum ist le

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = Df\big|_{(\vec{0},\vec{\mu})}\vec{x} + \vec{g}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad |g(\vec{x}, \vec{\mu})| \in \mathcal{O}(|\vec{x}|^2) \text{ für } |\vec{x}| \rightarrow 0$$

- Zu den Unterräumen gehören Mannigfaltigkeiten, die die entsprechenden Orbits enthalten

- **Zweiter Schritt:** trenne Raum in linear stabile und linear neutral stabile Richtungen auf und schreibe (5) entsprechend um:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{6}$$
$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{7}$$

mit: alle Eigenwerte von A haben Realteil 0, alle Eigenwerte von B haben negativen Realteil, g_y und g_z sind die $\vec{y}$ und $\vec{z}$-Komponenten von $g(\vec{x})$

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$d_t\vec{y} = A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{6}$$
$$d_t\vec{z} = B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{7}$$

- Nahe $\vec{x} = 0$:
  - Dynamik dominiert von linearen Termen
  - $|\vec{z}|$ fällt exponentiell
- Achtung:
  - i.A. $|\vec{z}| \nrightarrow 0$, da exponentieller Abfall irgendwann durch nichtlinearen Term $g_z(\vec{x}, \vec{y}, \vec{\mu})$ kompensiert
  - $\vec{z}$ dadurch auf eine Manigfaltigkeit $\vec{z} = h(\vec{y})$ eingeschränkt mit $|h(\vec{y})| \in \mathcal{O}(|\vec{y}|^2)$ für $|\vec{y}| \to 0$, nachdem die Transienten abgeklungen sind
  - Transienten ziehen $\vec{z}$ schnell (exponentiell) auf Manigfaltigkeit
  - Dynamik dort viel langsamer ($\in \mathcal{O}(|\vec{y}|^2)$ wegen neutraler Stabilität)

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$
\begin{aligned}
d_t\vec{y} &= A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \\
d_t\vec{z} &= B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \\
\vec{z} &= h(\vec{y})
\end{aligned}
$$

- Gleichung (8) beschreibt die **zentrale Mannigfaltigkeit**
- die zentrale Mannigfaltigkeit ist tangential an den stabilen Unterraum: $h(\vec{0}) = \vec{0}$ und $Dh|_{\vec{y}=\vec{0}}$ (hier ohne Beweis)
- die zentrale Mannigfaltigkeit ist **invariant**, d.h., Trajektorien, die auf ihr starten, bleiben auf ihr (hier ohne Beweis)
$$\Rightarrow d_t z = Dh\, d_t y \tag{9}$$
- Einsetzen von (6), (7) und (8) in (9):
$$Bh(\vec{z}) + \vec{g}_z(\vec{y}, h(\vec{y}), \vec{\mu}) = Dh\left[A\vec{y} + g_y(\vec{y}, h(\vec{y}), \vec{\mu})\right] \tag{10}$$
- Lösen von (10) nach $h(\vec{y})$ liefert zentrale Mannigfaltigkeit
- In der Praxis: Potenzreihe für $h(\vec{y})$ um $\vec{y} = \vec{0}$, gleichsetzen von Vorfaktoren von Potenzen links und rechts in (10)
- Zentrale Mannigfaltigkeit auch oft anwendbar bei $n \to \infty$, solange alle Eigenwerte von B $\Re(\lambda_i) \leq -\delta < 0$ mit δ unabhängig von n erfüllen

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$d_t\vec{y} = A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \tag{6}$$
$$d_t\vec{z} = B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \tag{7}$$
$$\vec{z} = h(\vec{y}) \tag{8}$$

- Warum der ganze Aufwand?
- Zentrale Mannigfaltigkeit meist erheblich niedrigerdimensional als ursprüngliches Problem!
- Statt ursprünglich n Dimensionen jetzt nur noch m, wobei m die Anzahl der Eigenwerte mit verschwindendem Realteil (=Dimension der zentralen Mannigfaltigkeit) bezeichnet

- In der Praxis oft $n \to \infty, m = 1$ oder zumindest klein

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$d_t\vec{y} = A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{6}$$

$$d_t\vec{z} = B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{7}$$

$$\vec{z} = h(\vec{y}) \tag{8}$$

- Haben uns aber noch um ein Problem gedrückt:
  - Zentrale Mannigfaltigkeit setzt Trennung in neutral stabile und stabile Eigenvektoren voraus
  - An der Bifurkation wechselt Eigenvektor von stabil über neutral stabil zu instabil

  $\Rightarrow$ Auftrennung ändert sich, können zentrale Mannigfaltigkeit nicht so einfach bilden
- Interessanterweise hilft ein einfacher Trick

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$d_t\vec{y} = A\vec{y} + \vec{g}_y(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{6}$$

$$d_t\vec{z} = B\vec{z} + \vec{g}_z(\vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}) \tag{7}$$

$$\vec{z} = h(\vec{y}) \tag{8}$$

- Erster Schritt: skaliere so, dass Bifurkation bei $\vec{\mu}_c = \vec{0}$ passiert
- Zweiter Schritt: betrachte $\vec{\mu}$ als weitere 'Variable' mit zusätzlicher Gleichung

  $$d_t\vec{\mu} = \vec{0}$$

  (Variable Konstante?? Konstante Variable??)

Zentrale Mannigfaltigkeit

$$d_t\vec{y} = A'\vec{y} + \overrightarrow{g'}_y(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \tag{6}$$

$$d_t\vec{z} = B'\vec{z} + \overrightarrow{g'}_z(\vec{y},\vec{z},\vec{\mu}) \tag{7}$$

$$\vec{z} = h(\vec{y},\vec{\mu}) \tag{8}$$

$$d_t\vec{\mu} = \vec{0} \tag{9}$$

- Das neue System erfüllt (schwarze Magie!!) die Bedingungen für die Existenz einer zentralen Mannigfaltigkeit!
- Die Abhängigkeit von $\vec{\mu}$ erzeugt i.A. neue Nichtlinearitäten $\Rightarrow$ neue Aufteilung in lineare und nichtlineare Anteile $A', B', \overrightarrow{g'}_y, \overrightarrow{g'}_z$
- **Erweiterte zentrale Mannigfaltigkeit** $h(\vec{x},\vec{\mu})$ erlaubt Untersuchung des Flusses in der Nähe des Bifurkationspunktes

Zentrale Mannigfaltigkeit - Beispiel

- Betrachte System

$$d_t x = \mu x - xy$$
$$d_t y = -y + x^2$$

- Stationärer Punkt $\forall \mu$ bei $x = y = 0$
- Jacobi-Matrix hat am stationären Punkt Eigenwerte μ und -1 $\Rightarrow$ bei $\mu = 0$ nichthyperbolischer stationärer Punkt, Bifurkation
- Erweiterte zentrale Mannigfaltigkeit: füge $d_t\mu = 0$ hinzu, teile in lineare und nichtlineare Teile auf
  - μ "Variable" $\Rightarrow$ linearer Teil der ersten Gleichung ist 0, x hat Eigenwert 0
  - linearer Teil der zweiten Gleichung ist -1
  - $\Rightarrow$ y linear stabil, x, μ linear neutral stabil

Zentrale Mannigfaltigkeit - Beispiel

- Betrachte System

$$d_t x = \mu x - xy$$
$$d_t y = -y + x^2$$
$$d_t \mu = 0$$

- Suchen also erweiterte zentrale Mannigfaltigkeit der Form $y = h(x, \mu)$
- Invarianz der Mannigfaltigkeit $\Rightarrow$ $d_t y = \partial_x h d_t x + \partial_\mu h d_t \mu$
- Einsetzen (zusammen mit $y = h(x, \mu)$) liefert

$$-h(x, \mu) + x^2 = d_x h(\mu x - xh(x, \mu))$$

Zentrale Mannigfaltigkeit - Beispiel

$$-h(x, \mu) + x^2 = d_x h(\mu x - xh(x, \mu))$$

- Entwickeln nun $h(x, \mu)$ nach x und μ bis zur quadratischen Ordnung um $x = \mu = 0$ (tangential an $y = 0$):

$$h = ax^2 + bx\mu + c\mu^2 + \dots$$

- Einsetzen liefert

$$x^2 - ax^2 - bx\mu - c\mu^2 - \dots = (2ax + b\mu)x(\mu - ax^2 - bx\mu - c\mu^2$$

- Muss für alle x, μ gelten $\Rightarrow$ Vorfaktoren müssen links und rechts gleich sein
  - $x^2 : (1 - a) = 0 \Rightarrow a = 0$
  - $\mu x : b = 0$
  - $\mu^2 : c = 0$

$\Rightarrow$ in quadratischer Ordnung gilt für die erweiterte zentrale Mannigfalt
$y = x^2$

⇒ der Fluss auf der erweiterten zentralen Mannigfaltigkeit gehorcht $d_t x = \mu x - x^3$

Wichtige Bifurkationstypen

- Wir betrachten im folgenden wichtige Klassen von Bifurkationen, die immer wieder auftreten
- Beschränken uns hier auf Kodimension 1
- Besonders interessant: **generische Bifurkationen**

Generische Bifurkationen

- **Idee:** betrachte Bifurkationsproblem $d_t \vec{x} = f(\vec{x}, \vec{\mu})$
- Reale Systeme eingeschränkt durch **Nebenbedingungen** (**Constraints**): Energieerhaltung, Symmetrie, ...
- Wir nennen eine Bifurkation **generisch**, wenn für kleines ε das gestörte Problem $d_t \vec{x} = f(\vec{x}, \vec{\mu}) + \varepsilon v(\vec{x}, \vec{\mu}))$ eine Bifurkation gleichen Typs hat, falls das gestörte System noch die gleichen Constraints erfüllt
- Kennen wir die Constraints an ein System, erwarten wir die entsprechende generische Bifurkation vorzufinden

Normalformen von Bifurkationen

- Bifurkationstypen üblicherweise in **Normalform** angegeben
- **Idee:**
  - reduziere System auf (erweiterte) zentrale Mannigfaltigkeit am stationären Punkt, an dem Bifurkation auftritt

    - reduziertes System ist dann *topologisch äquivalent (homöomorph)* zu **Normalform** der Bifurkation $\approx$ einfachstes System mit gleicher Bifurkation

Bifurkationstypen

- Erste Einteilung: **stationäre** und **nicht-stationäre** Bifurkationen
- **Stationäre Bifurkation:** reller Eigenwert hat Nulldurchgang
- "stationär", da entstehende Muster nach

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \lambda\vec{\eta} \Rightarrow \vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$$

  wachsen (real: bis zur Sättigung), aber die gleiche Form behalten
- **nicht-stationäre Bifurkation:** Imaginärteile beteiligt, ergibt oszillatorische Komponente
- Vereinfachung der Notation:
    - Kodimension 1: betrachten geeignetes skalares μ statt Vektor
    - nehmen im Folgenden immer an, dass bei $\mu = 0$ ein nicht-hyperbolischer stationärer Punkt an $\vec{x} = 0$ existiert

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Saddle-node-Bifurkationen

- Allgemeinster Constraint an $f(\vec{x}, \vec{\mu})$: glatt genug in $\vec{x}, \vec{\mu}$
- Hier ohne Beweis: generische Bifurkation ist dann **Saddle-node-Bifurkation** mit Normalform $d_t x = \mu - ax^2 + \ldots$
- Fixpunkte in führender Ordnung:
  - $x = \pm\sqrt{\mu/a}$ für $\mu/a > 0$
  - keine Fixpunkte für $\mu/a < 0$
  - Bifurkation bei $\mu = 0$

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Saddle-node-Bifurkationen

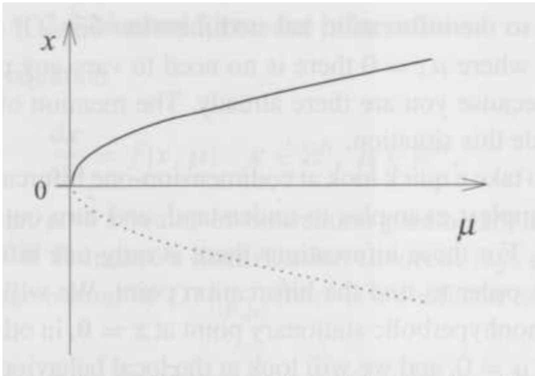
$d_t x = \mu - ax^2 + \ldots$, Fixpunkte $x = \pm\sqrt{\mu/a}$ für $\mu/a > 0$

- Wachstumsrate von Störungen / Eigenwerte:
$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\pm\sqrt{\mu/a}} = -2ax|_{x=\pm\sqrt{\mu/a}} = \mp 2a\sqrt{\mu/a}$$
- $a > 0 : x = +\sqrt{\mu/a}$ **stabil**, $x = -\sqrt{\mu/a}$ **instabil**
- $a < 0 : x = +\sqrt{\mu/a}$ **instabil**, $x = -\sqrt{\mu/a}$ **stabil**

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Saddle-node-Bifurkationen

- Visuelle Darstellung von Bifurkationen: **Bifurkationsdiagram** mit durchgezogenen Linien für stabilie, gestrichelten Linien für instabile Fixpunkte
- Bifurkationsdiagramm der Saddle-node-Bifurkation für $a > 0$:



Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Transkritische Bifurkationen

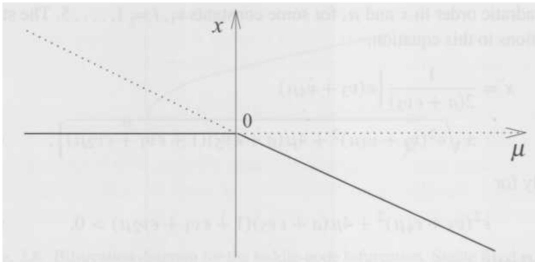
- Häufiger Constraint an $f(x, \mu)$ (zusätzlich zu Glattheit): $f(0, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$
- Die generische Bifurkation ist dann (hier ohne Beweis) die **transkritische Bifurkation** mit Normalform $d_t x = \mu x + a x^2$
- Fixpunkte bei $x = 0$ und $x = -\mu / a$
- Wachstumsrate von Störungen / Eigenwerte:
  - $x = 0 \Rightarrow d_x f|_{x=0} = \mu$: **stabil** für $\mu < 0$, **instabil** für $\mu > 0$
  - $x = \mu / a \Rightarrow d_x f|_{x=\mu/a} = -\mu$: **instabil** für $\mu < 0$, **stabil** für $\mu > 0$

Stationäre Kodimension-1 -

Bifurkationen

Transkritische Bifurkationen

- Bifurkationsdiagramm:



- Zwei Fixpunkte für jeden Wert von μ, tauschen Stabilität bei $\mu = 0$

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

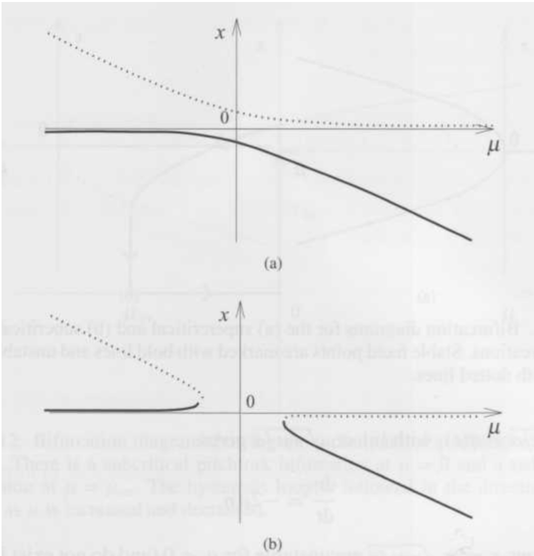
Transkritische Bifurkationen

- Was passiert bei Störungen, die Constraint nicht einhalten?
- Fallen dann in allgemeinere generische Bifurkationsklasse zurück (hier: Saddle-node-Bifurkation)
- Beispiel: betrachte Störung $d_t x = \varepsilon v_1 + \mu x + a x^2$
  - jetzt: $f(0, \mu) = \varepsilon v_1 \neq 0 \Rightarrow$ Constraint verletzt
  - Fixpunkte bei $x = \frac{1}{2a}\left(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\varepsilon v_1 a}\right)$, falls $\mu^2 > 4\varepsilon v_1 a$.
  - Falls $a v_1 > 0 \Rightarrow$ stationäre Lösungen nur in $2\sqrt{\varepsilon v_1 a} < x < -2\sqrt{\varepsilon v_1 a}$
  - Statt transkritischer Bifurkation dann zwei Saddle-node-Bifurkationen

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Transkritische Bifurkationen

- Bifurkationsdiagramm des Beispiels:



Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Pitchfork-Bifurkationen

- Starte mit transkritischer Bifurkation (Constraint: Glattheit & $x = 0$ ist Fixpunkt für alle μ)
- Fügen wir die Bedingung hinzu, dass f symmetrisch unter $x \to -x$ sein soll ($f(-x, \mu) = -f(x, \mu), f$ ungerade in x), ist die generische Bifurkation eine **Pitchfork-Bifurkation**
- Pitchfork-Bifurkationen haben zwei mögliche Normalformen: **subkritisch** und **superkritisch**

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Subkritische Pitchfork-Bifurkationen

- Pitchfork-Bifurkation allgemein: Glattheit & $f(0,\mu) = 0$ & $f(-x,\mu) = -f(x,\mu)$
- **Subkritische Normalform:** $d_t x = \mu x + a x^3$
- Fixpunkte: $x = 0 \quad \forall \mu, x = \pm\sqrt{-\mu/a}, \quad \mu < 0$
- Wachstumsrate von Störungen / Eigenwerte:
  - $x = 0 \Rightarrow d_x f|_{x=0} = \mu$: **stabil** für $\mu < 0$, **instabil** für $\mu > 0$
  - $x = \pm\sqrt{-\mu/a} \Rightarrow d_x f|_{x=\pm\sqrt{-\mu/a}} = -2\mu$: **instabil** für $\mu < 0$, **nicht existent** für $\mu > 0$

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

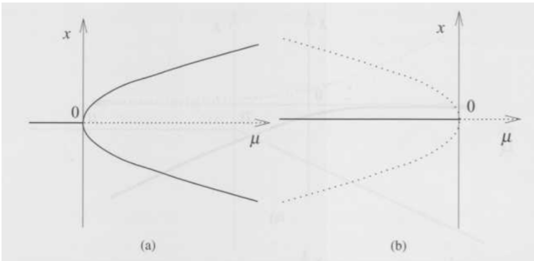
Superkritische Pitchfork-Bifurkationen

- Pitchfork-Bifurkation allgemein: Glattheit & $f(0,\mu) = 0$ & $f(-x,\mu) = -f(x,\mu)$
- **Superkritische Normalform:** $d_t x = \mu x - a x^3$
- Fixpunkte: $x = 0 \quad \forall \mu, x = \pm\sqrt{\mu/a}, \quad \mu > 0$
- Wachstumsrate von Störungen / Eigenwerte:
  - $x = 0 \Rightarrow d_x f|_{x=0} = \mu$: **stabil** für $\mu < 0$, **instabil** für $\mu > 0$
  - $x = \pm\sqrt{\mu/a} \Rightarrow d_x f|_{x=\pm\sqrt{\mu/a}} = -2\mu$: **nicht existent** für $\mu < 0$, **stabil** für $\mu > 0$

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Pitchfork-Bifurkationen

- Bifurkationsdiagramm:



(a) superkritisch (b) subkritisch

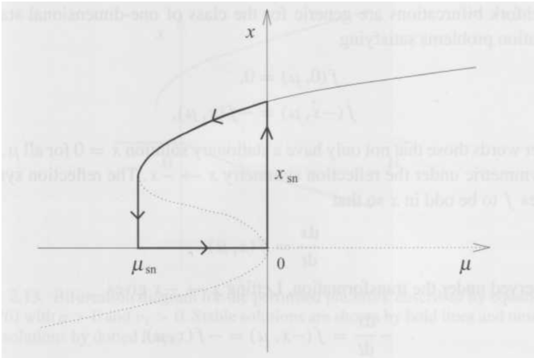
- Subkritische Pitchfork-Bifurkation: Bifurkationszweige existieren **vor** Bifurkationspunkt, Lösung 0 dort stabil
- Superkritische Pitchfork-Bifurkation: Bifurkationszwege existieren **nach** Bifurkationspunkt, Lösung 0 dort instabil

Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Pitchfork-Bifurkationen

- Superkritisch: 0 wird instabil, glatter Übergang auf einen der beiden stabilen Zweige
- Subkritisch: 0 wird instabil, kein stabiler Lösungszweig übrig
- Was passiert dann? Lösung wächst auf anderen Zweig an, der von lokaler linearer Stabilitätsanalyse nicht vorhergesagt wird

Beispiel:



Stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Pitchfork-Bifurkationen

- Pitchfork-Bifurkation generisch für: Glattheit & $f(0, \mu) = 0$ & $f(-x, \mu) = -f(x, \mu)$
- Störungen, die Constraints noch erfüllen ⇒ immer noch Pitchfork
- Störungen, die Symmetrie aufgeben ⇒ transkritisch
- Störungen, die Symmetrie und $f(0, \mu) = 0$ aufgeben ⇒ Saddle-node

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

- Eigenwerte der Jacobi-Matrix müssen nicht notwendig reell sein
- Weitere mögliche Kodimension-1 - Bifurkation: Realteil eines Paares komplex konjugierter Eigenwerte hat Nulldurchgang, Imaginärteil bleibt ungleich 0

- Bekannt als **Hopf-Bifurkation** oder **oszillatorische Bifurkation** mit Normalform

  \begin{eqnarray} d_t x &=& \mu x - \omega y + a(x^2 + y^2)x - b(x^2 + y^2)y\ d_t y &=& \mu y + \omega x + a(x^2 + y^2)y + b(x^2 + y^2)x \end{eqnarray}

  mit $x, y, \mu, \omega, a, b \in \mathbb{R}$
- Offenbar ist $x = y = 0$ Fixpunkt $\forall \mu, \omega, a, b$
- Jacobi-Matrix an $(x, y) = \vec{0}$:

  \begin{equation*}\left.Df\right|_\vec{0} = \left(\begin{matrix}

  ```
  \mu & -\omega\\
  \omega & \mu
  \end{matrix}\right)
  ```

  \end{equation*}
- Hopf-Bifurkation für $\mu = 0, \omega \neq 0$

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

- Normalform der Hopf-Bifurkation:

  \begin{eqnarray} d_t x &=& \mu x - \omega y + a(x^2 + y^2)x - b(x^2 + y^2)y\ d_t y &=& \mu y + \omega x + a(x^2 + y^2)y + b(x^2 + y^2)x \end{eqnarray}

  mit $x, y, \mu, \omega, a, b \in \mathbb{R}$
- Leichter verständlich in Polarkoordinaten r, θ mit $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$:

\begin{eqnarray} d_t r &=& \mu r + ar^3\ d_t \theta &=& \omega + br^2 \end{eqnarray}

- Rechte Seiten unabhängig von $\theta \Rightarrow$ Stabilität nur durch r bestimmt

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

\begin{eqnarray} d_t r &=& \mu r + ar^3\ d_t \theta &=& \omega + br^2 \end{eqnarray}

- Gleichung für r ist Normalform der Pitchfork-Bifurkation, subkritisch für $a > 0$, superkritisch für $a < 0$
- Interpretation: Hopf-Bifurkation ist Pitchfork-Bifurkation für r plus Rotation in θ (da $\omega \neq 0$)

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

\begin{eqnarray} d_t r &=& \mu r + ar^3\ d_t \theta &=& \omega + br^2 \end{eqnarray}

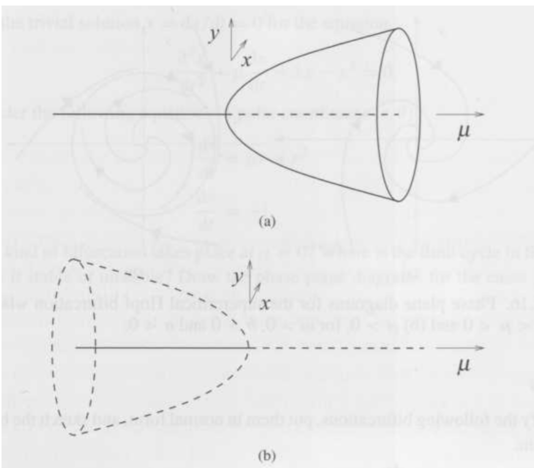
- Fixpunkte für $r : r = 0 \forall \mu$ und $r = \sqrt{-\mu/a}$ für $\mu/a < 0$ (negativer branch für Radius r nicht existent!)
- Fixpunkt bei $\sqrt{-\mu/a}$ hat periodischen Orbit, falls $\omega + br^2 = \omega - b\mu/a \neq 0 (\Rightarrow d_t\theta \neq 0)$

- Trajektorie läuft in diesem Fall immer wieder den Kreis mit Radius $\sqrt{-\mu/a}$ ab
- Wachstumsrate von Störungen / Eigenwerte: (müssen nur r stören, da rhs unabhängig von θ)
  - $r = 0 \Rightarrow d_r f|_{r=0} = \mu$: **stabil** für $\mu < 0$, **instabil** für $\mu > 0$
  - $r = \sqrt{-\mu/a} \Rightarrow d_r f|_{r=\sqrt{-\mu/a}} = -2\mu$:
    - $a > 0$: **instabil** für $\mu < 0$, **nicht existent** für $\mu > 0$ (subkritisch)
    - $a < 0$: **nicht existent** für $\mu < 0$, **stabil** für $\mu > 0$ (superkritisch)

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

- Bifurkationsdiagramme für $\omega > \mu b/a$ (Orbit läuft gegen den Uhrzeigersinn)



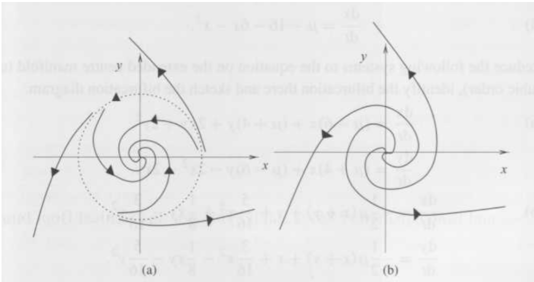
(a) subkritisch (b) superkritisch

Nicht-stationäre Kodimension-1 -

Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

- Phasenraumportraits subkritische Hopf-Bifurkation mit $\omega > 0, b > 0, a > 0$

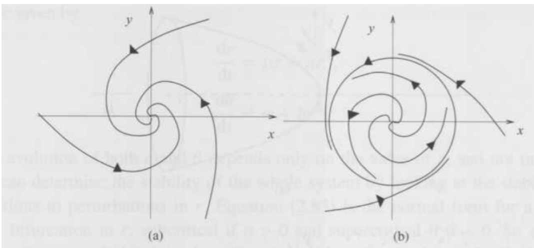


(a) $\mu < 0$ (b) $0 < \mu < a\omega/b$

Nicht-stationäre Kodimension-1 - Bifurkationen

Hopf-Bifurkationen

- Phasenraumportraits superkritische Hopf-Bifurkation mit $\omega > 0, b > 0, a < 0$



(a) $a\omega/b < \mu < 0$ (b) $\mu > 0$

Strukturbildung

- Das ist ja alles sehr interessant...
- ...aber was hat das mit Strukturbildung zu tun???

- **Idee:**
  - Strukturen entstehen, wenn Lösungen gegen 'bestimmte' Störungen instabil werden
  - Störungen entlang instabiler Eigenvektoren wachsen dann aus ursprünglicher Lösung (oft: homogen) heran
  - In der Realität irgendwann Sättigung, kann aber meist nur aus voller nicht-linearer Gleichung vorhergesagt werden
- Zwei wichtige Fragestellungen:
  - gegeben nichtlineares Gleichungssystem, welche Muster können entstehen?
  - gegeben beobachtete Muster, welche Gleichungen könnten das System beschreiben?
- Beides in der Praxis 'nicht völlig trivial' (vulgo: fast nie exakt möglich)

Beispiel: Analyse des Turing-Systems

Erinnerung:

- Modell-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \Delta u \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \Delta v \tag{2}$$

- Dabei sind
  - u Aktivatorkonzentration, $D_u > 0$ Diffusionskonstante des Aktivators
  - v Inhibitorkonzentration, $D_v \gg D_u$ Diffusionskonstante des Inhibitors
  - $f(u, v)$ Einfluss von u auf Produktion von u und v

(Aktivator $\Rightarrow$ beide Ableitungen positiv)

- $g(u, v)$ Einfluss von v auf Produktion von u und v (Inhibitor $\Rightarrow$ beide Ableitungen negativ)

Analyse des Turing-Systems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D_u \Delta u \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \Delta v \tag{2}$$

- Nehmen nun an, dass es eine homogene Lösung $u = u_0, v = v_0$ mit $u_0, v_0 = \text{const.}$ gibt
- Wollen Stabilität untersuchen $\Rightarrow$ stören homogene Lösung durch $u = u_0 + \tilde{u}, v = v_0 + \tilde{v}$ mit $|\tilde{u}|, |\tilde{v}| \ll 1$
- Einsetzen in (1), (2) und Linearisieren liefert (wg. u_0, v_0 konstant)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \tilde{u} + \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \tilde{v} + D_u \Delta \tilde{u} =: a\tilde{u} - b\tilde{v} + D_u \Delta \tilde{u}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)} \tilde{u} + \left.\frac{\partial g}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)} \tilde{v} + D_v \Delta \tilde{v} =: c\tilde{u} - d\tilde{v} + D_v \Delta \tilde{v}$$

- Vorzeichen so gewählt, dass für positives a, b, c, d Molekül u als Aktivator, v als Inhibitor fungiert

Analyse des Turing-Systems

$$\partial_t \tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} + D_u \Delta \tilde{u}$$
$$\partial_t \tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} + D_v \Delta \tilde{v}$$

- Turing-System soll **diffusionsgetriebene** Instabilität haben $\Rightarrow$ System soll ohne Diffusion stabil sein
- Setzen wir $D_u = 0, D_v = 0$ erhalten wir als Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte der Jacobi-Matrix:
  $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}$
- Wir wissen: Störungen in Richtung der Eigenvektoren entwickeln sich nach $\tilde{u} = \hat{u}e^{\sigma t}, \tilde{v} = \hat{v}e^{\sigma t}$
- Stabilität ohne Diffusion
  $\Rightarrow \sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0 \Rightarrow a < d \wedge ad < bc$

Analyse des Turing-Systems

$$\partial_t \tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} + D_u \Delta \tilde{u}$$
$$\partial_t \tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} + D_v \Delta \tilde{v}$$

- Was passiert mit Störungen im vollen linearisierten System (mit Diffusion)?
- Können Lösungen als Fourier-Reihen entwickeln
- Analyse möglicher Muster ⇔ Vorhersage, welche Fourier-Moden wachsen können

Analyse des Turing-Systems

$$\partial_t \tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} + D_u \Delta \tilde{u}$$
$$\partial_t \tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} + D_v \Delta \tilde{v}$$

- Fourier-Moden haben die Form:

  $$\tilde{u} = \hat{u}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$
  $$\tilde{v} = \hat{v}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$

  mit $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{C}$ (Lösungen werden reell durch komplex konjugierte Moden)
- Einsetzen in linearisiertes System liefert:

$$\sigma\tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} - k^2 D_u \tilde{u}$$
$$\sigma\tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} - k^2 D_v \tilde{v}$$

Analyse des Turing-Systems

$$\sigma\tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} - k^2 D_u \tilde{u}$$
$$\sigma\tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} - k^2 D_v \tilde{v}$$
$$\tilde{u} = \hat{u} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$
$$\tilde{v} = \hat{v} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$

- Wir haben also

$$\left\{\sigma - a + k^2 D_u\right\} \tilde{u} = -b\tilde{v} \Rightarrow \tilde{u} \;=\; \frac{-}{\sigma - a +}$$
$$\left\{\sigma + d + k^2 D_v\right\} \tilde{v} = \quad c\tilde{u} \Rightarrow \tilde{v} \;=\; \frac{}{\sigma + d +}$$

- also

$$\tilde{v} = -\frac{bc}{\left(\sigma - a + k^2 D_u\right)\left(\sigma + d + k^2 D\right.}$$

oder

$$\left(\sigma - a + k^2 D_u\right)\left(\sigma + d + k^2 D_v\right) = -bc \Leftrightarrow \left(\sigma - a + k^2 D_u\right)$$

Analyse des Turing-Systems

$$\sigma\tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} - k^2 D_u \tilde{u}$$
$$\sigma\tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} - k^2 D_v \tilde{v}$$
$$\tilde{u} = \hat{u} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$
$$\tilde{v} = \hat{v} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.\,c.$$

- $\left(\sigma - a + k^2 D_u\right)\left(\sigma + d + k^2 D_v\right) + bc = 0$ ist Dispersionsrelation des Systems
- System instabil ⇒ mindestens eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung hat positiven Realteil
- Leicht zu zeigen:
  - geht nur mit einer positiven und einer negativen Wurzel
  - gilt für $h(k^2) := (D_u k^2 - a)(D_v k^2 + d) + bc < 0$
- Offenbar: falls $\min h(k^2) < 0$, gibt es ein ganzes Intervall von instabilen Moden mit $k_1^2 < k^2 < k_2^2$

Analyse des Turing-Systems

$$\begin{aligned}
\sigma\tilde{u} &= a\tilde{u} - b\tilde{v} - k^2 D_u \tilde{u} \\
\sigma\tilde{v} &= c\tilde{u} - d\tilde{v} - k^2 D_v \tilde{v} \\
\tilde{u} &= \hat{u} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.c. \\
\tilde{v} &= \hat{v} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.c.
\end{aligned}$$

- aus $h(k^2) := (D_u k^2 - a)(D_v k^2 + d) + bc < 0$ bestimmen wir

$$h_{\min} := \min h(k^2) = -\frac{(dD_u - aD_v)^2}{4D_u D_v} - ad + bc$$

$$\arg\min h(k^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{D_u} - \frac{d}{D_v}\right)$$

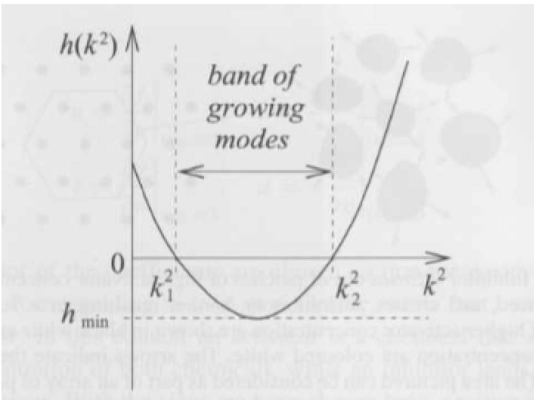
- Instabilität existiert für $\frac{a}{D_u} > \frac{d}{D_v}$ (da k^2 positiv) und $h_{\min} < 0$

Analyse des Turing-Systems

$$\sigma\tilde{u} = a\tilde{u} - b\tilde{v} - k^2 D_u \tilde{u}$$
$$\sigma\tilde{v} = c\tilde{u} - d\tilde{v} - k^2 D_v \tilde{v}$$
$$\tilde{u} = \hat{u}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.c.$$
$$\tilde{v} = \hat{v}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t} + c.c.$$

- $\left(\sigma - a + k^2 D_u\right)\left(\sigma + d + k^2 D_v\right) + bc = 0$ ist Dispersionsrelation des Systems
- System instabil ⇒ mindestens eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung hat positiven Realteil
- Leicht zu zeigen:
  - geht nur mit einer positiven und einer negativen Wurzel
  - gilt für $h(k^2) := (D_u k^2 - a)(D_v k^2 + d) + bc < 0$
- Offenbar: falls $\min h(k^2) < 0$, gibt es ein ganzes Intervall von instabilen Moden mit $k_1^2 < k^2 < k_2^2$

Analyse des Turing-Systems



- Wie schön, so viele instabile Moden!
- Wie entstehen daraus jetzt Strukturen?
- Und wie können wir die vorhersagen?

Amplitudengleichungen

- Nahe der Bifurkation liefert lineare Stabilitätsanalyse Moden, die anwachsen können
- Meist gibt es viel instabile Moden (wie im Turing-System)
- Vorhersage der Entwicklung einer Überlagerung instabiler Moden benötigt nichtlineare Gleichung
- Linearisierung reicht nicht mehr aus!
- Wechselwirkungen zwischen einzelnen Moden und höhere nichtlineare Terme wählen genaue Moden aus ⇒ entscheiden über realisierte Muster

Amplitudengleichungen

- In unserer Betrachtung haben wir die Lösung des gestörten Systems aus sich entwickelnden Störungsmoden zusammengesetzt
- Dieses "Zusammensetzen" entspricht inverser Fourier-Transformation (komplex-konjugierte Terme machen Ergebnis reell!)

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\vec{k}} z(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + c.\,c.$$

- Die Information über mögliche Muster steckt in den $z(\vec{k}, t)$ ⇒ suchen Gleichungen für diese
- Gleichungen zur Bestimmung von $z(\vec{k}, t)$ nennen wir **Amplitudengleichungen**

Amplitudengleichungen

- Falls nur "wenige" instabile Moden existieren, können wir

    - System auf erweiterte zentrale Mannigfaltigkeit reduzieren
    - Dynamik damit auf wenige neutral stabile (kritische) Moden am Bifurkationspunkt projizieren
- Dann haben wir

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} z_j(t) e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{x}} + c.c.$$

- In diesem Fall finden wir häufig um den Bifurkationspunkt System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = g(z, \mu)$$

- Das sind dann die Amplitudengleichungen des Systems
- Amplitudengleichungen oft erstaunlich universell: gleiche Art von Muster führt oft auch in sehr unterschiedlichen Systemen zu gleichen Amplitudengleichungen

Amplitudengleichungen

- Nur, warum sollten blos wenige instabile Moden existieren?
- Beispiel Turing-System: Intervall instabiler Moden
- zentrale Mannigfaltigkeit hilft dann meist nicht weiter...
- In diesem Fall hilft oft eine Skalentrennung (kommt später)
- Andererseits können wir in der Praxis tatsächlich oft viele Moden ausschliessen!
- Grund: **Symmetrien**

Äquivariante Bifurkationstheorie

- Beobachtete Muster oft hoch symmetrisch
- Hat mehrere Ursachen, liegt aber oft an Symmetrieen des zugrundeliegenden physikalischen Systems
- **Beispiele:**
  - Translationsinvarianz (in der Praxis wegen Randeffekten nur approximativ und weit weg vom Rand)
  - Rotationsinvarianz
  - Invarianz gegenüber Spiegelungen
  - ...
- **Äquivariante Bifurkationstheorie:** Studium von Bifurkationen in symmetrischen Systemen
- Wichtigste Aussage:
  - Symmetrien des Systems führen zu Symmetrien von f (rechte Seite der System-DGLen)
  - Symmetrien in f führen (unter gewissen Umständen) zur Existenz symmetrischer Lösungszweige

Äquivariante Bifurkationstheorie

- Aus Zeitgründen hier nur grober Überblick
- Starte mit DGL $d_t\vec{x} = f(\vec{x}, \mu)$ mit Bifurkationsparameter μ
- **Annahme:** System besitzt Symmetrie
- Symmetrien beschrieben durch **Gruppen:**
  - Gruppenelemente: Operationen, die System unverändert lassen (*Symmetrietransformationen*)
  - Verknüpfung: Hintereinanderausführung von Symmetrietransformationen (offensichtlich selbst Symmetrietransformation)
  - Neutrales Element: Identitätstransformation
  - Assoziativität, Inverses trivial

Äquivariante Bifurkationstheorie

Darstellung von Symmetriegruppen

- Gruppen sind abstrakte mathematische Objekte
- Symmetriegruppen *wirken* auf Elemente eines Vektorraums V
- Wirkung beschrieben durch **Darstellung** der Gruppe
- Eine Darstellung einer (endlichen oder kompakten Lie-Gruppe) Γ über einem Körper F ist ein Homomorphismus θ von Γ in die Matrizengruppe $GL(n, F)$. n nennen wir **Grad** oder **Dimension** der Darstellung
- Grob gesagt: n-dimensionale Darstellung ist Menge invertierbarer $n \times n$ Matrizen, die kompatibel zur Gruppenstruktur sind
- Gleiche Gruppe kann viele verschiedene Darstellungen verschiedener Dimensionen haben

Äquivariante Bifurkationstheorie

Darstellung von Symmetriegruppen

- Ein Unterraum W von V heißt **Γ-invariant** unter der Darstellung θ einer Gruppe Γ, falls $\theta(\gamma)w \in W \quad \forall \gamma \in \Gamma, w \in W$
- Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, falls die einzigen Γ-invarianten Unterräume $\{\vec{0}\}$ und V selbst sind (kein Unterraum der Darstellung wäre als "kleinere" Darstellung geeignet)

- Eine Darstellung heißt **absolut irreduzibel**, falls die einzigen linearen Abbildungen, die mit der Darstellung von Γ in V kommutieren, skalare Vielfache der Identität sind

Äquivariante Bifurkationstheorie

Isotropie-Untergruppen

- Die Symmetrie einer Lösung $\vec{x}$ wird beschrieben durch ihre **Isotropie-Untergruppe** $\Sigma_x \subset \Gamma$:

$$\Sigma_{\vec{x}} = \left\{ \sigma \in \Gamma : \sigma\vec{x} = \vec{x} \right\}$$

Fixpunkt-Unterräume

- Zu einer Untergruppe Σ von Γ definieren wir den Fixpunkt-Unterraum $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ durch

$$\mathrm{Fix}(\Sigma) = \{ \vec{x} \in V : \sigma\vec{x} = \vec{x}, \forall \sigma \in \Sigma \}$$

- $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ enthält Punkte des Vektorraums, die von Σ unberührt bleiben
- Beispiel: alle Punkte auf Achse einer Rotation

Äquivariante Bifurkationstheorie

- DGL $d_t\vec{x} = f(\vec{x}, \mu)$ mit (hier: räumlicher, aber raumzeitlich auch möglich) Symmetriegruppe Γ
- Was bedeutet hier Symmetrie?
- Für $\gamma \in \Gamma$ muss $\forall \vec{x}$ gelten: $\vec{y} := \gamma\vec{x}$ folgt der gleichen DGL
- Also: $d_t\vec{y} = f(\vec{y}, \mu) = f(\gamma\vec{x}, \mu)$
- γ zeitunabhängig $\Rightarrow$ $d_t\vec{y} = \gamma d_t\vec{x} = \gamma f(\vec{x}, \mu)$

- Gleichsetzen: $\gamma f(\vec{x}, \mu) = f(\gamma \vec{x}, \mu) \quad \forall \gamma \in \Gamma$
- Einschränkung der Form möglicher $f(\vec{x}, \mu)$, bekannt als **Äquivarianzbedingung**

Äquivariante Bifurkationstheorie - das equivariant branching lemma

- Zentrales Resultat der äquivarianten Bifurkationstheorie
- Es sei Γ endliche Gruppe oder kompakte Lie-Gruppe, die auf reellem Vektorraum V absolut irreduzibel wirkt.
- Es sei $d_t \vec{x} = f(\vec{x}, \mu)$ ein Γ-invariantes Bifurkationsproblem mit
  - $f(\vec{0}, 0) = \vec{0}$
  - $Df|_{(\vec{0},0)} = 0$
  - $Df = c(\mu)I$ (erfüllt wegen absolut irreduzibel) und $Df_\mu|_{(\vec{0},0)} \vec{v} = c'(0)\vec{v}$ mit $c'(0) \neq 0$

Es sei Σ eine Isotropie-Untergruppe von Γ mit $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) = 1$. Dann existiert ein eindeutiger glatter Lösungszweig von $f(\vec{x}, \mu) = \vec{0}$ (stationäre Punkte), so dass jede Lösung auf dem Zweig die Isotropie-Untergruppe Σ hat.

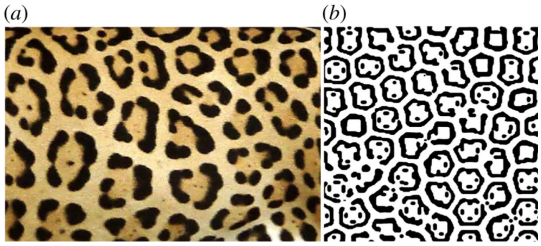
Äquivariante Bifurkationstheorie

- Was hilft uns das?
- Symmetrien des Systems bekannt $\Rightarrow$ können
  - stationäre Punkte mit entsprechender Symmetrie finden
  - dort Stabilität untersuchen
- Liefert oft einige der möglichen Muster, die entstehen können

- Beispiel quadratische Box: Symmetriegruppe $\mathcal{D}_4$, erlaubt Studium möglicher Bifurkationen

Bifurkationen auf Gittern

- **Erinnerung:** wir wollten Anzahl möglicher instabiler Fourier-Moden einschränken
- Oft möglich durch **Gitter-Symmetrie**
- **Beobachtung:** viele Muster in der Natur scheinen sich (fast) periodisch in allen Raumrichtungen zu wiederholen



Liu RT, Liaw SS, Maini PK. 2006 Two-stage Turing model for generating pigment patterns on the leopard and the jaguar. Phys. Rev. E 74, 011914.

- Beschrieben durch Gruppe diskreter Translationen $\mathcal{L} = \left\{ n_1 \vec{l}_1 + n_2 \vec{l}_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\}$
- Periodizität schränkt auch mögliche Moden auf **duales Gitter** $\mathcal{L}^* = \left\{ n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ ein

Bifurkationen auf Gittern

- Einschränkung auf duales Gitter $\mathcal{L}^* = \left\{ n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ reduziert oft Anzahl instabiler Moden auf kleine diskrete Menge
- Beispiel: Bifurkation, bei der alle Moden mit $\left| \vec{k} \right| = k_c \neq 0$ instabil werden, alle anderen stabil bleiben

- Hyper-Kugel mit Radius k_c kann nur endliche Anzahl von Punkten in dualem Gitter schneiden
- Können dann über erweiterte zentrale Mannigfaltigkeit Dynamik des Systems auf diese Moden reduzieren
- Einsetzen in nichtlineares System (oder Studium der Symmetrien, ...) liefert uns dann Amplitudengleichungen für diese Moden
- **Achtung:** weiter weg vom Bifurkationspunkt werden auch höhere harmonische instabil

Stationäre Bifurkationen auf quadratischen Gittern

- Betrachten als Beispiel quadratisches Gitter mit Symmetriegruppe $\mathcal{D}_4 \ltimes \mathcal{T}^2$ mit skalarer Funktion u
- Setzen o.B.d.A. $k_c = 1$
- Quadratisches Gitter: zwei orthogonale kritische Wellenvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$
- In führender Ordnung gilt für jede relle skalare Lösung auf dem Gitter $u(\vec{x}, t) = z_1(t)e^{ix_1} + z_2(t)e^{ix_2} + c.c., \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- Wollen jetzt für eine Repräsentation der Symmetriegruppe die Isotropie-Untergruppen bestimmen, deren Fixpunkt-Unterräume Dimension 1 haben
- Die Existenz dieser Lösungen ist dann durch das equivariant branching lemma garantiert
- **Achtung:**
  - Wahl der Repräsentation entscheidet über Isotropie-Untergruppen
  - Welche Repräsentation ist richtig? Oft die fundamentale, kann aber auch eine andere sein...

    - Warum? Und wie findet man die richtige? Pffffffffffffffffffffffffffffft....

Stationäre Bifurkationen auf quadratischen Gittern

- Fundamentale Repräsentation von $\mathcal{D}^4 \ltimes \mathcal{T}^2$ auf quadratischem Gitter hat drei Generatoren
    - Rotation ρ um $\pi/2$
    - Spiegelung m in x_1
    - Translation $\vec{p} \in \mathcal{T}^2$
- Gruppe soll auf komplexe Amplituden z_1 und z_2 (und deren komplex-konjugierte) wirken
- können wir auch als vierdimensionale reelle Repräsentation schreiben, die auf $\vec{z} = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ wirkt, wobei $z_1 = \xi_1 + i\eta_1, z_2 = \xi_2 + i\eta_2$
- Dann:

  $ M_\rho = \left(\begin{matrix}

  ```
  0 & 0 & 1 & 0\\
  0 & 0 & 0 & -1\\
  1 & 0 & 0 & 0\\
  0 & 1 & 0 & 0
  \end{matrix}\right),$
  ```

  $ M_m = \left(\begin{matrix}

  ```
  1 & 0 & 0 & 0\\
  0 & -1 & 0 & 0\\
  0 & 0 & 1 & 0\\
  0 & 0 & 0 & 1
  \end{matrix}\right),$
  ```

  $ M_p = \left(\begin{matrix}

```
\cos p_1 & \sin p_1 & 0 & 0\\
-\sin p_1 & \cos p_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \cos p_2 & \sin p_2\\
0 & 0 & -\sin p_2 & \cos p_2
\end{matrix}\right)$
```

Stationäre Bifurkationen auf quadratischen Gittern

- Isotropie-Untergruppen können für diese Repräsentation bestimmt werden:

Zweig	**Beispielpunkt** (z_1, z_2)	**Isotropie-Untergruppe** Σ	$\dim \mathrm{Fix}(\Sigma)$ **(wählbare Parameter)**
Triviale Lösung	$(0, 0)$	$\mathcal{D}^4 \ltimes T^2$	0
Quadrate	(ξ_1, ξ_1)	$\mathcal{D}^4$	1
Rollen	$(\xi_1, 0)$	$\mathcal{D}^2 \ltimes \mathcal{S}^1$	1
Bimodal	(ξ_1, ξ_2) $\xi_1 \neq \xi_2$	$\mathcal{D}^2$	2

- Existenz von Quadraten und Rollen durch equivariant branching lemma garantiert

Stationäre Bifurkationen auf quadratischen Gittern

- Wie leitet man nun Amplitudengleichungen ab?
- Brauchen Gleichungen der Form:

$$d_t z_1 = g_1(z_1, z_2, \mu)$$
$$d_t z_2 = g_2(z_1, z_2 \mu)$$

- Vorgehen:
  - Entwicklen g_1, g_2 nach z_1 und z_2
  - Für jede Ordnung betrachten wir unabhängig Auswirkungen der Äquivarianzbedingungen die sich aus der Symmetriegruppe ergeben
  - Addieren Ergebnisse bis zur gewünschten Ordnung auf

Stationäre Bifurkationen auf quadratische

$$d_t z_1 = g_1(z_1, z_2, \mu)$$
$$d_t z_2 = g_2(z_1, z_2 \mu)$$

- **Lineare Ordnung:** Entwicklung liefert

$$d_t z_1 = \mu_1 z_1 + c_1 \bar{z}_1 + c_2 z_2 + c_3 \bar{z}_2 + h$$
$$d_t z_2 = \mu_2 z_2 + d_1 \bar{z}_2 + d_2 z_1 + d_3 \bar{z}_1 + h$$

- Äquivarianzbedingungen der Art $\gamma f(\vec{z}, \mu) = f(\gamma \vec{z}, \mu)$
- Translationsinvarianz:
  - Anwenden von Translation $\vec{p} = (p_1, p_2)$ auf (z_1, z_2) führt zu
  - Anwenden auf rechte Seiten von $*$ und $**$ liefert $\forall p_1, p_2, z_1$

$$e^{-ip_1}(\mu_1 z_1 + c_1 \bar{z}_1 + c_2 z_2 + c_3 \bar{z}_2) = (\mu_1 e^{-ip_1} z_1 + c_1 e^{ip_1} \bar{z}$$
$$e^{-ip_2}(\mu_2 z_2 + d_1 \bar{z}_2 + d_2 z_1 + d_3 \bar{z}_1) = (\mu_2 e^{-ip_2} z_2 + d_1 e^{ip_2} \bar{z}$$

Stationäre Bifurkationen auf quadratische

$$d_t z_1 = \mu_1 z_1 + c_1 \bar{z}_1 + c_2 z_2 + c_3 \bar{z}_2 + h.o.t.$$
$$d_t z_2 = \mu_2 z_2 + d_1 \bar{z}_2 + d_2 z_1 + d_3 \bar{z}_1 + h.o.t.$$
$$e^{-ip_1}(\mu_1 z_1 + c_1 \bar{z}_1 + c_2 z_2 + c_3 \bar{z}_2) = (\mu_1 e^{-ip_1} z_1 + c_1 e^{ip_1} \bar{z}_1 + c_2 e^{-}$$
$$e^{-ip_2}(\mu_2 z_2 + d_1 \bar{z}_2 + d_2 z_1 + d_3 \bar{z}_1) = (\mu_2 e^{-ip_2} z_2 + d_1 e^{ip_2} \bar{z}_2 + d_2 e^{-}$$

- Gilt $\forall p_1, p_2, z_1, z_2 \Rightarrow c_j = d_j = 0, j = 1, 2, 3$
- Damit bleibt in linearer Ordnung:

$$\begin{aligned} d_t z_1 &= \mu_1 z_1 \\ d_t z_2 &= \mu_2 z_2 \end{aligned}$$

- Äquivalente Rechnung für Rotation $(z_1, z_2) \rightarrow (\bar{z}_2, z_1)$ führt auf
$$\bar{\mu}_2 \bar{z}_2 = \mu_1 \bar{z}_2 \wedge \mu_1 z_1 = \mu_2 z_1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu \in \mathbb{R}$$
- Also:

$$\begin{aligned} d_t z_1 &= \mu z_1 \\ d_t z_2 &= \mu z_2 \end{aligned}$$

Stationäre Bifurkationen auf quadratischen Gittern

- Gleiche Rechnungen können dann auf höhere Ordnungen angewandt werden
- Gehen wir bis zur kubischen Ordnung, finden wir dann insgesamt für die $\mathcal{D}^4 \ltimes \mathcal{T}^2$-äquivarianten Amplitudengleichungen bis zur 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \mu z_1 - a_1 |z_1|^2 z_1 - a_2 |z_2|^2 z_1 \\ \frac{dz_2}{dt} &= \mu z_2 - a_1 |z_2|^2 z_2 - a_2 |z_1|^2 z_2 \end{aligned}$$

  mit $\mu, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
- Stationäre Lösungen: $d_t z_1 = d_t z_2 = 0$
  - Triviale Lösung $z_1 = z_2 = 0$
  - x_1-Rollen: $|z_1|^2 = \mu / a_1, z_2 = 0$
  - x_2-Rollen: $z_1 = 0, |z_2|^2 = \mu / a_2$
  - Quadrate: $|z_1|^2 = |z_2|^2 = \mu / (a_1 + a_2)$

- Weitere Muster (bimodale Muster aus Isotropie-Überlegungen) erst in höheren Ordnungen sichtbar

Stationäre Bifurkationen auf hexagonalen

- Äquivalente Rechnung für hexagonale Gitter findet als $\mathcal{D}^6 \ltimes T^2$-
  Ordnung:

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu z_1 + a\bar{z}_2\bar{z}_3 - b|z_1|^2 z$$
$$\frac{dz_2}{dt} = \mu z_2 + a\bar{z}_3\bar{z}_1 - b|z_2|^2 z$$
$$\frac{dz_3}{dt} = \mu z_3 + a\bar{z}_1\bar{z}_2 - b|z_3|^2 z$$

  mit $\mu, a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- Stationäre Lösungen: $d_t z_1 = d_t z_2 = d_t z_3 = 0$
  - Triviale Lösung $z_1 = z_2 = z_3 = 0$
  - Rollen, z.B. entlang z_1: $|z_1|^2 = \mu/b, z_2 = z_3 = 0$
  - Hexagone: $\mathfrak{R}(z_1) = \mathfrak{R}(z_2) = \mathfrak{R}(z_3) = R_0$ mit $\mu + aR_0 -$
  - Rechtecke:

    $$\mathfrak{R}(z_1) = -a/(b-c), \quad \mathfrak{R}(z_2) = \mathfrak{R}(z_3) = \pm\sqrt{1/(b+c)\ (}$$
- Weitere Muster erst in höheren Ordnungen sichtbar

Envelope-Gleichungen

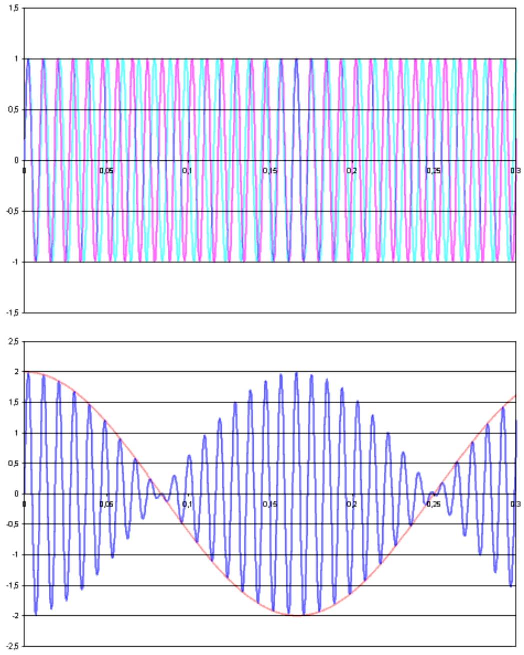
- Bisherige Überlegungen davon abhängig, dass nur diskrete Anzahl instabiler Moden auftritt
- Gerechtfertigt durch Symmetrieüberlegungen:
  - beobachtete Muster oft periodisch in allen Raumrichtungen
  - Moden liegen dann auf regulärem Gitter

    - trennt sauber zwischen stabilen, neutral stabilen und instabilen Moden auf
- In der Realität ist die Periodizität aber nie perfekt:
    - Muster endet irgendwann ⇒ Randeffekte
    - Ungenauigkeiten und nicht-perfekte Abstände
    - Muster nicht perfekt wiederholt
    - $\dots$
- Dann: Abtrennung neutral stabiler Moden wird "unsauber", in unmittelbarer Umgebung sind Moden "fast" neutral stabil
- Reduktion auf zentrale Mannigfaltigkeit funktioniert dann nicht

Envelope-Gleichungen

- In diesem Fall hilft oft folgende **Idee:**
    - im Idealfall (ideale Symmetrie, keine oder perfekte Randbedingungen, ...) hätten wir oft Periodizität ⇒ kritische Moden auf diskretem Gitter, $\dots$
    - leichte Abweichungen vom Idealfall (leichte Symmetriebrechung, weit entfernter Rand, $\dots$) ⇒ Moden in unmittelbarer Umgebung werden auch "beinahe" kritisch (wachsen/fallen extrem langsam)

⇒ Überlagerung sehr naher Moden ⇒ **Schwebung**



By Barak Sh (based on copyright claims). - No machine-readable source provided. Own work assumed (based on copyright claims)., Copyrighted free use, [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4124203 (https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4124203)](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4124203)

Envelope-Gleichungen

- Verwenden dann Multi-Skalen-Zerlegung, um schnelle Oszillationen von langsam modulierter Amplitude zu trennen
- Wir nehmen wieder an, dass nur wenige Moden zum Muster beitragen (warum? pfffffffffffffffft!)
- Wir zerlegen dann in
  - Schnelle Zeit $\tilde{t}$
  - Langsame Zeit T
  - Schnellen Raum $\tilde{x}, \tilde{y}, \ldots$
  - Langsamen Raum $X, Y, \ldots$

  und schreiben die Lösung als (hier 2D):

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}; X, Y, T) = \sum_j A_j(X, Y, T) e^{i(k_x^j \tilde{x} + k_y^j \tilde{y})}$$

- Amplituden hängen hier nur von langsamen Variablen ab
- Gleichungen für Amplituden nennen wir dann Envelope-Gleichungen

Envelope-Gleichungen - Beispiel: Swift-Hohenberg-Gleichung

- Beispiel: Swift-Hohenberg-Gleichung aus Fluiddynamik:

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \mu u - u^3$$

  mit $\mu \in \mathbb{R}$ als Kontrollparameter
- Lineare Stabilitätsanalyse: linearer Anteil

$$\partial_t u = -(1 + \partial_x^2)^2 u + \mu u$$

- Einsetzen einer Mode
  $u = e^{\lambda(k)t + ikx} \Rightarrow \lambda(k) = -(1 - k^2)^2 + \mu$
  - $\mu < 0$: stabil gegen alle Störungen
  - $\mu > 0$: Band um $k = 1$ wird instabil,
    irgendwann gesättigt durch Nichtlinearität $-u^3$
- Bifurkation!

Envelope-Gleichungen - Beispiel: Swift-Hohenberg-Gleichung

- Interessieren uns für Onset der Muster $\Rightarrow |\mu| \ll 1$
- Instabilste Mode bei $k = 1$, andere Moden im instabilen Band führen zu Envelope (langsamer Schwebung)
- Erhöhen wir μ, soll das Muster aus der homogenen Lösung herauswachsen

- Motiviert den Ansatz

$$u(x,t) = \epsilon A(X,T)e^{ix} + c.c.$$

- Das instabile Band hat Breite $\mathcal{O}(\epsilon)$ (entspricht langsamer Längenskala) und instabilster Eigenwert liegt in $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (entspricht langsamer Zeitskala)
- konsistente Skalierung ist dann $X = \epsilon x, T = \epsilon^2 t$

Envelope-Gleichungen - Beispiel: Swift-H Gleichung

- Also: $u(x,t) = \epsilon A(X,T)e^{ix} + c.c., X = \epsilon x, T = \epsilon^2 t$ in $\partial_t u = -(1+\partial_x^2)^2 u + \mu u - u^3$ einsetzen
- Liefert:

$$\begin{aligned} \partial_t u = \epsilon^3 \left(\partial_T A e^{ix} + c.c.\right) &\stackrel{!}{=} -\partial_x^4 u - 2\partial_x^2 u - u + \epsilon^2 u - u^3 \\ &= \epsilon \left[(-(i+\epsilon\partial_X)^4 - 2(i+\epsilon\partial_X)^2 - (1-\epsilon^2))A\right] e^{ix} + c.c. \\ &= \quad \epsilon \left[-(1 - 4i\epsilon\partial_X - 6\epsilon^2\partial_X^2 + 4i\epsilon^3\partial_X^3 + \epsilon^4\partial_X^4)A\right] e^{ix} + c. \\ &\quad + \epsilon \left[-2(-1 + 2i\epsilon\partial_X + \epsilon^2\partial_X^2)A - (1-\epsilon^2)A\right] e^{ix} + c.c \\ &\quad - \epsilon^3 (A^3 e^{i3x} + 3|A|^2 A e^{ix} + 3|A|^2 \bar{A} e^{-ix} + 3\bar{A}^3 e^{-i3x}) \end{aligned}$$

- Man kann zeigen: alle Koeffizienten von $\epsilon^j e^{ikx}$ müssen unabhäng gleich sein
- Liefert bis zur 3. Ordnung:
  - $\epsilon e^{ix} : 0 = -A + 2A - A = 0$
  - $\epsilon^2 e^{ix} : 0 = 4i\partial_X A - 4i\partial_X A = 0$
  - $\epsilon^3 e^{ix} : \partial_T A = 4\partial_X^2 A + A - 3|A|^2 A$

Envelope-Gleichungen - Beispiel: Swift-Hohenberg-Gleichung

- $\partial_T A = 4\partial_X^2 A + A - 3|A|^2 A$ ist die Envelope-Gleichung für Rollen im 1D-Swift-Hohenberg-Modell
- Beispiel einer sehr allgemeinen Klasse von Envelope-Gleichungen: **komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung**

Abschließendes Beispiel: Gray-Scott-Modell

- Im Turing-Modell kommen Funktionen f, g vor, die Reaktionsraten beschreiben
- Bisher nur linear approximiert
- Verschiedene nichtlineare Modelle existieren, Beispiel: Gray-Scott-Modell