14 Die LR-Zerlegung

- $$\left.\begin{aligned} Ax &= b_1 \\ Ax &= b_2 \\ &\vdots \\ Ax &= b_{100} \end{aligned}\right\}$$ 100x das gleiche System, aber unterschiedliche Daten $\underline{b}$

- Gauß-Elimination für jede neue rechte Seite $\underline{b}$

- bessere Lösung: LR-Zerlegung (oder LU-~~Zerlegung~~ Zerlegung)
  - nur 1x & anwenden für jede $\underline{b}$

k-ter Schritt in der Gauß-Elimina.

$$A^{(k-1)} x = b^{(k-1)}$$

$$\longrightarrow \quad A^{(k)} x = b^{(k)}$$

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots \\ & & \vdots & & \\ & & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{kk} – **Pivot**

$$\Big\downarrow M_k$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & & 0 & a^{(k)}_{k+1,k+1} & \cdots\ a^{(k)}_{k+1,n} \\ & & 0 & \vdots & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & \cdots & a^{(k)}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(k)} = M_k\, A^{(k-1)}$$

$$b^{(k)} = M_k\, b^{(k-1)}$$

M_k: Eliminationsmatrix

$$
M_k = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& 1 & & & & \text{\large 0} & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & 1 & & & \\
& \text{\large 0} & & -l_{k+1,k} & \ddots & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -l_{nk} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \; ; \quad i = k+1, \dots, n
$$

im letzten Schritt:

$$
A^{(n-1)} = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\
0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} \\
\vdots & & \ddots & \\
\vdots & & & \\
& \text{\large 0} & & \\
0 & & \ddots & a_{nn}^{(n-1)}
\end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$ nach $n-1$ Transformationen erhält man eine obere Dreiecksmatrix $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{(n-1)}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{M}_{n-1} \cdot \mathbb{M}_{n-2} \cdot \ldots \cdot \mathbb{M}_1 \cdot \mathbb{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{M}_1^{-1} \cdot \mathbb{M}_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{M}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbb{R}$$

$$\mathbb{M}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbb{0} & \\ & & 1 & & & \\ \mathbb{0} & & l_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & \vdots & \mathbb{0} & \ddots & \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_k^{-1} = \underline{\mathbb{I}}$$

D. h.

$$\mathbb{A} = \underbrace{\mathbb{M}_1^{-1} \cdot \mathbb{M}_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{M}_{n-1}^{-1}}_{\mathbb{L}} \cdot \mathbb{R}$$

$\mathbb{L}$ - untere Dreiecksmatrix

LR-Zerlegung: $\mathbb{A} = \mathbb{L} \cdot \mathbb{R}$

Satz 1 Falls kein Pivotelement $a_{ii}^{(i)}$; $i = 1, \ldots, n$, Null wird bestimmt die Gauß-Elimination eine LR-Zerlegung $\mathbb{A} = \mathbb{L} \cdot \mathbb{R}$.
Die Dreiecksmatrizen $\mathbb{L}, \mathbb{R}$ sind invertierbar.

Algorithmus (LR-Zerlegung)

Input: $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

1. Faktorisiere
$$\mathbb{A} = \mathbb{L} \cdot \mathbb{R}$$

2. $\mathbb{L} y = \underline{b}$ Vorwärtssubstitution

$\mathbb{R} \underline{x} = y$ Rückwärtssubstitution

$$\Rightarrow \quad Ax = \mathbb{L} \cdot \mathbb{R} x = \mathbb{L} y = \underline{\underline{b}} \qquad \checkmark$$

Frage: Welche reguläre Matrizen haben LR-Zerlegung?

Satz 2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, seien

$$\mathbb{A}^j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

A hat eine eindeutige $\mathbb{L}\mathbb{R}$-Zerlegung $\Longleftrightarrow$ alle $\mathbb{A}^j$ sind reguläre Matrizen.

Example IV.25

Linear system of equations:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\
2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ Compute LU decomposition of A:

$$A =: A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad l_{21} = 1,\ l_{31} = 2,\ l_{41} = 2$$

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad l_{32} = 0,\ l_{42} = -1$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad l_{43} = 0$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hence,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Using forward substitution, we solve $Ly = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 3 - 1 \cdot 1 = 2 \\ y_3 &= 2 - 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 0 \\ y_4 &= 4 - 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 \end{aligned}$$

Using backward substitution, we solve $Ux = y$ and obtain

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

If we want to solve now $A\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, we can again use the LU decomposition of A:

1. Solve $L\hat{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ by forward substitution

$$\Longrightarrow \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Solve $U\hat{x} = \hat{y}$ by backward substitution

$$\Longrightarrow \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Example IV.28

Compute LU decomposition of

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Step 1: eliminate $a_{j,1}^{(0)}$, $j = 2, 3, 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Pivot element $a_{22}^{(1)} = 0 \Longrightarrow$ exchange rows 2 and 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Step 2: eliminate $a_{j,2}^{(1)}$, $j = 3, 4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Step 3: eliminate $a_{43}^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \\
U &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \\
P &= \begin{pmatrix} (e^{v_1})^T \\ (e^{v_2})^T \\ (e^{v_3})^T \\ (e^{v_4})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{1})^T \\ (e^{3})^T \\ (e^{2})^T \\ (e^{4})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\tilde{A} &:= PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = LU
\end{aligned}$$