Bestimmung der Wurzeln nichtlinearer Gleichungen

Problem

Definition

Gegeben $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Finde* $\alpha \in (a,b)$:

$$f(\alpha) = 0. \tag{1}$$

- Existiert eine Lösung ?
- Wann ist die Lösung eindeutig ?
- Wie bestimmt man eine Lösung?

Numerische Verfahren . . . iterativ:

Ziel: Konstruriere eine Folge $\{x^k\}_k$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \alpha \tag{2}$$

Problem

Definition

Gegeben $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Finde* $\alpha \in (a, b)$:

$$f(\alpha) = 0. \tag{1}$$

- Existiert eine Lösung ?
- Wann ist die Lösung eindeutig ?
- Wie bestimmt man eine Lösung?

Numerische Verfahren . . . iterativ:

Ziel: Konstruriere eine Folge $\{x^k\}_k$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \alpha \tag{2}$$

Problem

Definition

Gegeben $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Finde* $\alpha \in (a, b)$:

$$f(\alpha) = 0. \tag{1}$$

- Existiert eine Lösung ?
- Wann ist die Lösung eindeutig ?
- Wie bestimmt man eine Lösung?

Numerische Verfahren ... iterativ:

Ziel: Konstruriere eine Folge $\{x^k\}_k$, so dass

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \alpha \tag{2}$$

Konvergenzordnung

Definition

Eine iterative Methode konvergiert mit der Ordnung p, falls

$$\exists C > 0 \; \forall k \geq k_0 \; |x^{k+1} - \alpha| \leq C|x^k - \alpha|^p$$

- $C \ldots$ Konvergenzfaktor
  $p = 1 \Rightarrow C < 1$
- lokale Konvergenz: hängt von der Wahl des x^0 ab
  globale Konvergenz: konvergiert für jeden $x^0 \in (a, b)$
- Aufwand (Effizienz) des Verfahrens:
  1. die Kosten pro Iterationsschritt
  2. die Anzahl der Iterationen

Konvergenzordnung

Definition

Eine iterative Methode konvergiert mit der Ordnung p, falls

$$\exists C > 0 \; \forall k \geq k_0 \; |x^{k+1} - \alpha| \leq C|x^k - \alpha|^p$$

- $C \ldots$ Konvergenzfaktor
  $p = 1 \Rightarrow C < 1$
- lokale Konvergenz: hängt von der Wahl des x^0 ab
  globale Konvergenz: konvergiert für jeden $x^0 \in (a, b)$
- Aufwand (Effizienz) des Verfahrens:
  1. die Kosten pro Iterationsschritt
  2. die Anzahl der Iterationen

Konvergenzordnung

Definition

Eine iterative Methode konvergiert mit der Ordnung p, falls

$$\exists C > 0 \ \forall k \geq k_0 \ |x^{k+1} - \alpha| \leq C|x^k - \alpha|^p$$

- $C \ldots$ Konvergenzfaktor
  $p = 1 \Rightarrow C < 1$

- lokale Konvergenz: hängt von der Wahl des x^0 ab
  globale Konvergenz: konvergiert für jeden $x^0 \in (a, b)$

- Aufwand (Effizienz) des Verfahrens:
  1. die Kosten pro Iterationsschritt
  2. die Anzahl der Iterationen

Konvergenzordnung

Definition

Eine iterative Methode konvergiert mit der Ordnung p, falls

$$\exists C > 0 \ \forall k \geq k_0 \ |x^{k+1} - \alpha| \leq C|x^k - \alpha|^p$$

- $C \ldots$ Konvergenzfaktor
  $p = 1 \Rightarrow C < 1$

- lokale Konvergenz: hängt von der Wahl des x^0 ab
  globale Konvergenz: konvergiert für jeden $x^0 \in (a, b)$

- Aufwand (Effizienz) des Verfahrens:
  1. die Kosten pro Iterationsschritt
  2. die Anzahl der Iterationen

Die Bisektionsmethode

Zwischenwertsatz: [Bolzano & Weistrass]

Sei eine stetige $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$ gegeben.
Dann ex. $\alpha \in (a,b) : f(\alpha) = 0$.

Beweis

Beweis = Bisektionsmethode:

- Folge: $\{I_k = (a^k, b^k)\}, I_k \subset I_{k-1} : \quad f(a^k)f(b^k) < 0 :$
  - $a_0 := a, b_0 := b, k := 0$
  - $x^k = (a^k + b^k)/2$
  - (a^{k+1}, b^{k+1}): $\quad f(a^{k+1})f(b^{k+1}) < 0$
    $f(x^k)f(a^k) < 0$ dann $a^{k+1} := a^k, b^{k+1} := x^k$
    $f(x^k)f(b^k) < 0$ dann $a^{k+1} := x^k, b^{k+1} := b^k$
  - $k := k + 1$

Die Bisektionsmethode

Zwischenwertsatz: [Bolzano & Weistrass]

Sei eine stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(a)f(b) < 0$ *gegeben.*
Dann ex. $\alpha \in (a, b) : f(\alpha) = 0$.

Beweis

Beweis = Bisektionsmethode:

• Folge: $\{I_k = (a^k, b^k)\}, I_k \subset I_{k-1} : \quad f(a^k)f(b^k) < 0 :$

- $a_0 := a, b_0 := b, k := 0$
- $x^k = (a^k + b^k)/2$
- $(a^{k+1}, b^{k+1}) : \quad f(a^{k+1})f(b^{k+1}) < 0$
  $f(x^k)f(a^k) < 0$ dann $a^{k+1} := a^k, b^{k+1} := x^k$
  $f(x^k)f(b^k) < 0$ dann $a^{k+1} := x^k, b^{k+1} := b^k$
- $k := k + 1$

Die Bisektionsmethode

Zwischenwertsatz: [Bolzano & Weistrass]

Sei eine stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(a)f(b) < 0$ *gegeben.*
Dann ex. $\alpha \in (a, b) : f(\alpha) = 0.$

Beweis

Beweis = Bisektionsmethode:

• Folge: $\{I_k = (a^k, b^k)\}, I_k \subset I_{k-1} : \quad f(a^k)f(b^k) < 0 :$

- $a_0 := a, b_0 := b, k := 0$
- $x^k = (a^k + b^k)/2$
- (a^{k+1}, b^{k+1})**:** $\quad f(a^{k+1})f(b^{k+1}) < 0$
  $f(x^k)f(a^k) < 0$ dann $a^{k+1} := a^k, b^{k+1} := x^k$
  $f(x^k)f(b^k) < 0$ dann $a^{k+1} := x^k, b^{k+1} := b^k$
- $k := k + 1$

- Abbruchskriterium: Sei $\varepsilon > 0 \ldots$ feste Toleranz

$$|x^m - \alpha| \leq |b^m - a^m| \leq \varepsilon$$

- Konvergenzgeschwindigkeit:

$$|x^{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x^k - \alpha|$$

- absoluter Fehler: $e^k := x^k - \alpha$

$$|e^k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$

$\Rightarrow$

Vorteile / Nachteile der Bisektionsmethode

- global konvergent (robust) :)
- nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit : (

- Abbruchskriterium: Sei $\varepsilon > 0 \ldots$ feste Toleranz

$$|x^m - \alpha| \leq |b^m - a^m| \leq \varepsilon$$

- Konvergenzgeschwindigkeit:

$$|x^{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x^k - \alpha|$$

- absoluter Fehler: $e^k := x^k - \alpha$

$$|e^k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$
$\Rightarrow$

Vorteile / Nachteile der Bisektionsmethode

- global konvergent (robust) :)
- nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit : (

- Abbruchskriterium: Sei $\varepsilon > 0 \ldots$ feste Toleranz

$$|x^m - \alpha| \le |b^m - a^m| \le \varepsilon$$

- Konvergenzgeschwindigkeit:

$$|x^{k+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|x^k - \alpha|$$

- absoluter Fehler: $e^k := x^k - \alpha$

$$|e^k| \le \frac{b-a}{2^k}$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$

$\Rightarrow$

Vorteile / Nachteile der Bisektionsmethode

- global konvergent (robust) :)
- nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit : (

- Abbruchskriterium: Sei $\varepsilon > 0 \ldots$ feste Toleranz

$$|x^m - \alpha| \leq |b^m - a^m| \leq \varepsilon$$

- Konvergenzgeschwindigkeit:

$$|x^{k+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x^k - \alpha|$$

- absoluter Fehler: $e^k := x^k - \alpha$

$$|e^k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} e^k = 0$

$\Rightarrow$

Vorteile / Nachteile der Bisektionsmethode

- global konvergent (robust) :)
- nur lineare Konvergenzgeschwindigkeit : (

Das Newton-Verfahren

für eine bessere Konvergenz $\Rightarrow$ f und f' (bzw. eine Approx. von f')

$\Rightarrow$ Sehnenverfahren, Sekantenverfahren, Regula-Falsi Methode, Newton-Verfahren

- Taylorreihe um α:

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi), \quad \xi \in (\alpha, x) \tag{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^k) + (x^{k+1} - x^k)q^k, \\ x^{k+1} &= x^k - f(x^k)/q^k, \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Das Newton-Verfahren

für eine bessere Konvergenz $\Rightarrow$ f und f' (bzw. eine Approx. von f')

$\Rightarrow$ Sehnenverfahren, Sekantenverfahren, Regula-Falsi Methode, Newton-Verfahren

- Taylorreihe um α:

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi), \quad \xi \in (\alpha, x) \tag{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^k) + (x^{k+1} - x^k)q^k, \\ x^{k+1} &= x^k - f(x^k)/q^k, \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Das Newton-Verfahren

für eine bessere Konvergenz $\Rightarrow$ f und f' (bzw. eine Approx. von f')

$\Rightarrow$ Sehnenverfahren, Sekantenverfahren, Regula-Falsi Methode, Newton-Verfahren

- Taylorreihe um α:

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi), \quad \xi \in (\alpha, x) \tag{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x^k) + (x^{k+1} - x^k)q^k, \\ x^{k+1} &= x^k - f(x^k)/q^k, \quad k \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

- Quasi-Newton-Verfahren:
- Sehenverfahren: $q^k := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(x^k), \quad k \geq 0$$

- Sekantenverfahren: $q^k := \frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k)-f(x^{k-1})} f(x^k), \quad k \geq 0$$

- Quasi-Newton-Verfahren:
- Sehenverfahren: $q^k := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(x^k), \quad k \geq 0$$

- Sekantenverfahren: $q^k := \frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k), \quad k \geq 0$$

- Quasi-Newton-Verfahren:
- Sehenverfahren: $q^k := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(x^k), \quad k \geq 0$$

- Sekantenverfahren: $q^k := \frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}$

$$x^{k+1} := x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k)-f(x^{k-1})} f(x^k), \quad k \geq 0$$

Das Newton-Verfahren

Sei $f \in C^1(a,b)$; $f'(\alpha) \neq 0$ und $q^k := f'(x^k)$,
dann
$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k \geq 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit:
Falls x^0 genug nahe an der Wurzel α liegt und f'' ex. und beschränkt ist, dann $p = 2$.
Abbruchskriterium: $|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$

proof

Vorteile / Nachteile des Newton-Verfahrens:

- Für einfache Nullstele lokal quadratisch konvergent. :)
- Benötigt Ableitungswerte (mehr numerischer Aufwand). :(
- Nur lokal konvergent. :(

Das Newton-Verfahren

Sei $f \in C^1(a,b)$; $f'(\alpha) \neq 0$ und $q^k := f'(x^k)$,
dann

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k \geq 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit:
Falls x^0 genug nahe an der Wurzel α liegt und f'' ex. und beschränkt ist, dann $p = 2$.
Abbruchskriterium: $|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$

proof

Vorteile / Nachteile des Newton-Verfahrens:

- Für einfache Nullstele lokal quadratisch konvergent. :)
- Benötigt Ableitungswerte (mehr numerischer Aufwand). : (
- Nur lokal konvergent. : (

Das Newton-Verfahren

Sei $f \in C^1(a,b)$; $f'(\alpha) \neq 0$ und $q^k := f'(x^k)$,
dann

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k \geq 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit:
Falls x^0 genug nahe an der Wurzel α liegt und f'' ex. und beschränkt ist, dann $p = 2$.
Abbruchskriterium: $|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$

proof

Vorteile / Nachteile des Newton-Verfahrens:

- Für einfache Nullstele lokal quadratisch konvergent. :)
- Benötigt Ableitungswerte (mehr numerischer Aufwand). : (
- Nur lokal konvergent. : (

Das Newton-Verfahren

Sei $f \in C^1(a,b)$; $f'(\alpha) \neq 0$ und $q^k := f'(x^k)$,
dann

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k \geq 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit:
Falls x^0 genug nahe an der Wurzel α liegt und f'' ex. und beschränkt ist, dann $p = 2$.
Abbruchskriterium: $|x^{k+1} - x^k| \leq \varepsilon$

proof

Vorteile / Nachteile des Newton-Verfahrens:

- Für einfache Nullstele lokal quadratisch konvergent. :)
- Benötigt Ableitungswerte (mehr numerischer Aufwand). : (
- Nur lokal konvergent. : (

- Bisektionsmethode: globale, lineare Konvergenz
- Newton-Verfahren: lokale, quadratische Konvergenz

$\Rightarrow$ Hybride Methoden:

Kombination einer langsameren (aber sicheren) Methode und einer schnellen Methode:
z.B. `fzero in Matlab`

- Bisektionsmethode: globale, lineare Konvergenz
- Newton-Verfahren: lokale, quadratische Konvergenz

$\Rightarrow$ Hybride Methoden:

Kombination einer langsameren (aber sicheren) Methode und einer schnellen Methode:
z.B. `fzero in Matlab`

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri.
Numerische Mathematik 1 (übers. L. Tobiska)
Springer, 2002.

G. Gramlich, W. Werner.
Numerische Mathematik mit Matlab
dpunkt.verlag, 2000.

G. Hämmerlich, K.-H. Hoffmann.
Numerische Mathematik
Springer Verlag, 1990.

Beweis

$$x^{k+1}-\alpha = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} - \alpha = \frac{(x^k-\alpha)f'(x^k) - f(x^k)}{f'(x^k)} \tag{5}$$

$$f(x^k) = \int_0^1 f'(\alpha + t(x^k-\alpha))dt(x^k-\alpha)$$

$$x^{k+1}-\alpha = \frac{f'(x^k)(x^k-\alpha) - \int_0^1 f'(\alpha+t(x^k-\alpha))dt(x^k-\alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(f'(x^k) - f'(\alpha+t(x^k-\alpha))\right) dt(x^k-\alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x^k)}(x^k-\alpha)^2 \le C(x^k-\alpha)^2$$

back to Newton

Beweis

$$x^{k+1} - \alpha = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} - \alpha = \frac{(x^k - \alpha)f'(x^k) - f(x^k)}{f'(x^k)} \tag{5}$$

$$f(x^k) = \int_0^1 f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\mathrm{d}t(x^k - \alpha)$$

$$x^{k+1} - \alpha = \frac{f'(x^k)(x^k - \alpha) - \int_0^1 f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\mathrm{d}t(x^k - \alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(f'(x^k) - f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\right)\mathrm{d}t(x^k - \alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x^k)}(x^k - \alpha)^2 \leq C(x^k - \alpha)^2$$

back to Newton

Beweis

$$x^{k+1} - \alpha = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} - \alpha = \frac{(x^k - \alpha)f'(x^k) - f(x^k)}{f'(x^k)} \tag{5}$$

$$f(x^k) = \int_0^1 f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\mathrm{d}t(x^k - \alpha)$$

$$x^{k+1} - \alpha = \frac{f'(x^k)(x^k - \alpha) - \int_0^1 f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\mathrm{d}t(x^k - \alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{\int_0^1 \left(f'(x^k) - f'(\alpha + t(x^k - \alpha))\right)\mathrm{d}t(x^k - \alpha)}{f'(x^k)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x^k)}(x^k - \alpha)^2 \leq C(x^k - \alpha)^2$$

back to Newton