MERKBLATT: DIFFERENZIALGLEICHUNGEN (=DGL)

3.1 Definition: Differenzialgleichung

Eine Gleichung der Form

$x'(t) = f(t, x(t))$,

wobei f eine differenzierbare Funktion zweier Variablen ist, heißt **Differenzialgleichung** erster Ordnung.

Der Einfachheit halber schreibt man häufig: $x' = f(t, x)$.

3.2 Definition: Ordnung einer Differenzialgleichung

Unter der **Ordnung** einer Differenzialgleichung – als grundlegendes Unterscheidungsmerkmal von Differenzialgleichungen - versteht man die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion in der Differenzialgleichung. Das heißt, Differenzialgleichungen höherer Ordnung beziehen sich auf höhere Ableitungen.

Beispiel:

$x''(t) = f(t, x, x')$ die allgemeine Form einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung, wobei die Funktion f nun von drei Variablen abhängt.

3.3 Definition: Darstellung einer Differenzialgleichung

Steht die höchste in der Gleichung vorkommende Ableitung $x^{(n)}(t)$ allein auf einer Seite, nennt man diese Form der Gleichung die **explizite** Darstellung der Differenzialgleichung, andernfalls eine **implizite** Darstellung.

Beispiel:

$x'(t) = \frac{x(t)}{t}$ ist explizite Darstellung, $x(t) = x'(t) \cdot x$ die implizite.

3.4 Definition: Linearität

Eine Differenzialgleichung heißt **linear**, wenn die enthaltenen Ausdrücke $x(t),\ x'(t),\ x''(t), etc.$ nur in erster Potenz vorkommen und wenn sie lediglich durch Addition oder Subtraktion miteinander verknüpft sind.

Beispiel:

$x'(t) + a \cdot x(t) = b\ mit\ a, b \in \mathbb{R}$ ist eine lineare DGL erster Ordnung.

3.5 Definition: (In-) Homogenität linearer Differenzialgleichungen

Die Inhomogenität der linearen Differenzialgleichung bezeichnet denjenigen Term, welcher weder von $x(t)$ oder einer der Ableitungen abhängt. Eine lineare Differenzialgleichung 1. oder 2. Ordnung heißt **homogen**, wenn ihre Inhomogenität identisch 0 ist. Andernfalls heißt die lineare DGL **inhomogen**.

Beispiel:

$x'(t) + a \cdot x(t) = 0, a \in \mathbb{R}$ ist eine homogene, lineare DGL erster Ordnung.

Lösen von Differenzialgleichungen vom Typ 1: Trennen von Variablen

Zur Lösungsmenge von linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung lässt sich Folgendes sagen: Ist f differenzierbar, dann existiert immer eine Lösung, die allerdings nicht notwendigerweise eindeutig ist.

<u>3.6 Definition:</u> Anfangswertproblem

Die Problematik der Eindeutigkeit einer Lösung innerhalb einer Lösungsschar einer DGL bezeichnen wir auch als **Anfangswertproblem**. Um eine spezielle Lösung zu erhalten, benötigt man eine weitere Voraussetzung, eine Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Konkret heißt das, dass die gesuchte Lösung durch einen vorgegebenen Punkt $(t_0|x_0)$ läuft. **Mit Hilfe dieser Angabe lässt sich z.B. der Proportionalitätsfaktor k bestimmen.**

Lösungsmethode: Trennen von Variablen

<u>Allgemeine Form:</u>

$$\boldsymbol{x' = \frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}}$$
$$\Leftrightarrow dx = \frac{f(t)}{g(x)} \cdot dt,$$

wo f, g zwei Funktionen und $g(x) \neq 0$ im betrachteten Intervall
Wir verwenden zudem das Differenzialkalkül $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, da die Notation so eleganter und einfacher ist.
Ziel ist es bei dieser Methode, die Variablen x, t durch Umformung der Differenzialgleichung voneinander zu „trennen", sodass direkt integrierbare Funktionen entstehen.

Schritt 1: Trennen der Variablen

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$$
$$\Leftrightarrow dx = \frac{f(t)}{g(x)} \cdot dt$$
$$\Leftrightarrow g(x) \cdot dx = f(t) \cdot dt$$

Die Terme der Gleichung werden so sortiert, dass alle Terme, die nur von der Funktion x abhängen, auf der linken Seite stehen, während alle Terme, die nur von t abhängen, auf die rechten Seite gebracht werden. Faktoren, die weder von x noch von t abhängen, können auf beiden Seiten stehen (vorzugsweise bei t).

Schritt 2: Integration beider Seiten der Gleichung

$$g(x) \cdot dx = f(t) \cdot dt$$
$$\Leftrightarrow \int g(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt$$
$$\Leftrightarrow G(x) = F(t)$$

$\Leftrightarrow G(x) = F(t)$, wo $F\ bzw. G$ Stammfunktionen zu $f\ bzw. g$.

Schritt 3: Umstellen nach $\boldsymbol{x(t)}$ durch Bildung der Umkehrfunktion von $\boldsymbol{G}$

$$G(x) = F(t)$$
$$x(t) = G^{(-1)}(F(t)),$$

vorausgesetzt die inverse Funktion $G^{(-1)}$ von G existiert.

Schritt 4: Anfangswertproblem lösen

Gegeben ist die Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Gesucht ist die spezielle Lösung $x(t)$, welche dieser Bedingung gerecht wird.