Das Wachstum der Weltbevölkerung

S. Dieter

Seminar: Mathematische Modellierung

01.02.2021

Gliederung

1. Grundlagen
2. Erste Modellierungsversuche
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. Prognose für das Bevölkerungswachstum
5. Zusammenfassung

Gliederung

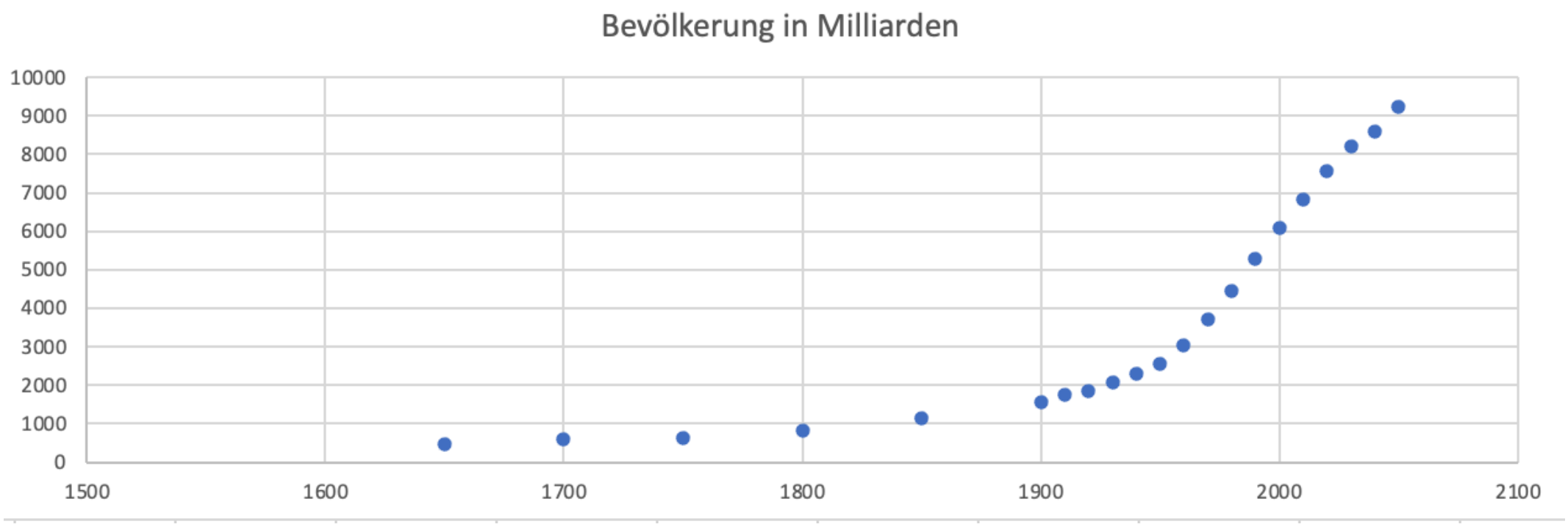
1. **Grundlagen**
2. Erste Modellierungsversuche
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. Prognose für das Bevölkerungswachstum
5. Zusammenfassung

Bevölkerungszahlen

Jahr	Bevölkerung	Jahr	Bevölkerung	Jahr	Bevölkerung	Jahr	Bevölkerung
1650	470.000.000	1900	1.550.000.000	1950	2.556.517.137	2010	6.825.750.456
1700	600.000.000	1910	1.750.000.000	1960	3.040.966.466	2020	7.563.094.182
1750	629.000.000	1920	1.860.000.000	1970	3.708.751.360	2030	8.206.457.382
1800	813.000.000	1930	2.070.000.000	1980	4.452.645.562	2040	8.759.140.657
1850	1.128.000.000	1940	2.300.000.000	1990	5.282.765.827	2050	9.224.375.956
				2000	6.081.527.896		

Quelle: Ortlieb et al. (2013): Mathematische Modellierung. S. 126.

Bevölkerungszahlen



Entwicklung der Bevölkerungszahl

Bevölkerung ($w(t)$) zum Zeitpunkt t:

$$w(t + \Delta t) = w(t) + G(t + \Delta t) - S(t + \Delta t) = w(t) + Z(t + \Delta t)$$

Die Bevölkerung wächst innerhalb einer Zeitspanne Δt um die Differenz von Geburten und Sterbefällen (“Mengenbilanz“)

Wachstum der Bevölkerung

Durchschnittliche Geschwindigkeit des Wachstums als Differenzenquotient:

$$\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t} = \frac{G(t+\Delta t)-S(t+\Delta t)}{\Delta t} = \frac{Z(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

Momentane Geschwindigkeit des Wachstums zum Zeitpunkt t:

$$\dot{w}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{Z(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \right) \quad := z(t)$$

Gliederung

1. Grundlagen
2. **Erste Modellierungsversuche**
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. Prognose für das Bevölkerungswachstum
5. Zusammenfassung

Annahme1: Lineares Wachstum

Annahme: konstante Wachstumsgeschwindigkeit

$$\Rightarrow \dot{w}(t) = z(t) = z, \qquad mit\ z\ konstant$$

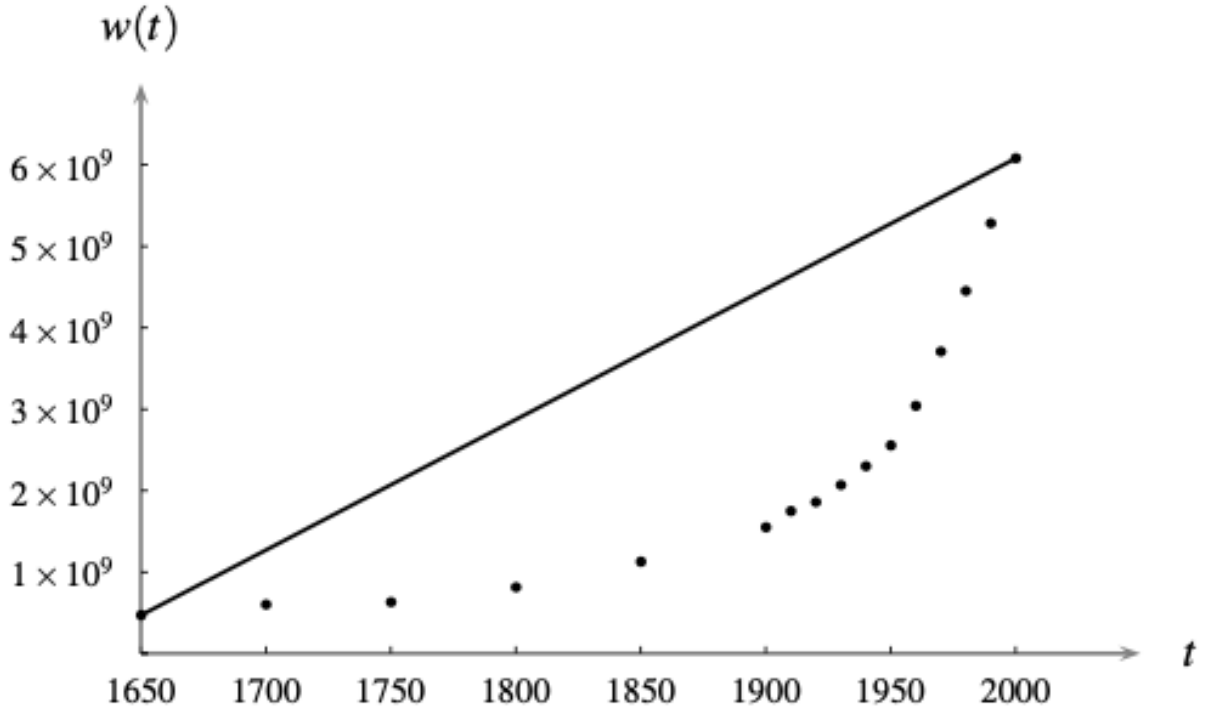
Es gelte zudem $w(t_0) = w_0$.

$$\Rightarrow w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{w}(s)ds = w_0 + \int_{t_0}^{t} zds = w_0 + z(t - t_0)$$

z lässt sich mit zwei Datenpunkten w_0, w_1 eindeutig bestimmen:

$$z = \frac{w(t_1) - w(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Überprüfen mit der Realität



Quelle: Ortlieb et al (2013): Mathematische Modellierung. S. 129

Annahme2: Exponentielles Wachstum

Annahme: Wachstumsrate bleibt konstant

$$\Rightarrow \ \dot{w}(t) = z(t) = \ \alpha w(t)$$

$$\textit{mit } \alpha \textit{ konstant und } \alpha := \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \approx \frac{1}{\Delta t} \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{w(t)}$$

Es gelte zudem $w(t_0) = w_0$.

Lösen der DGL:

$$w(t) = w_0 e^{\alpha(t - t_0)}$$

Annahme2: Exponentielles Wachstum

α lässt sich über 2 Anfangsbedingungen berechnen:

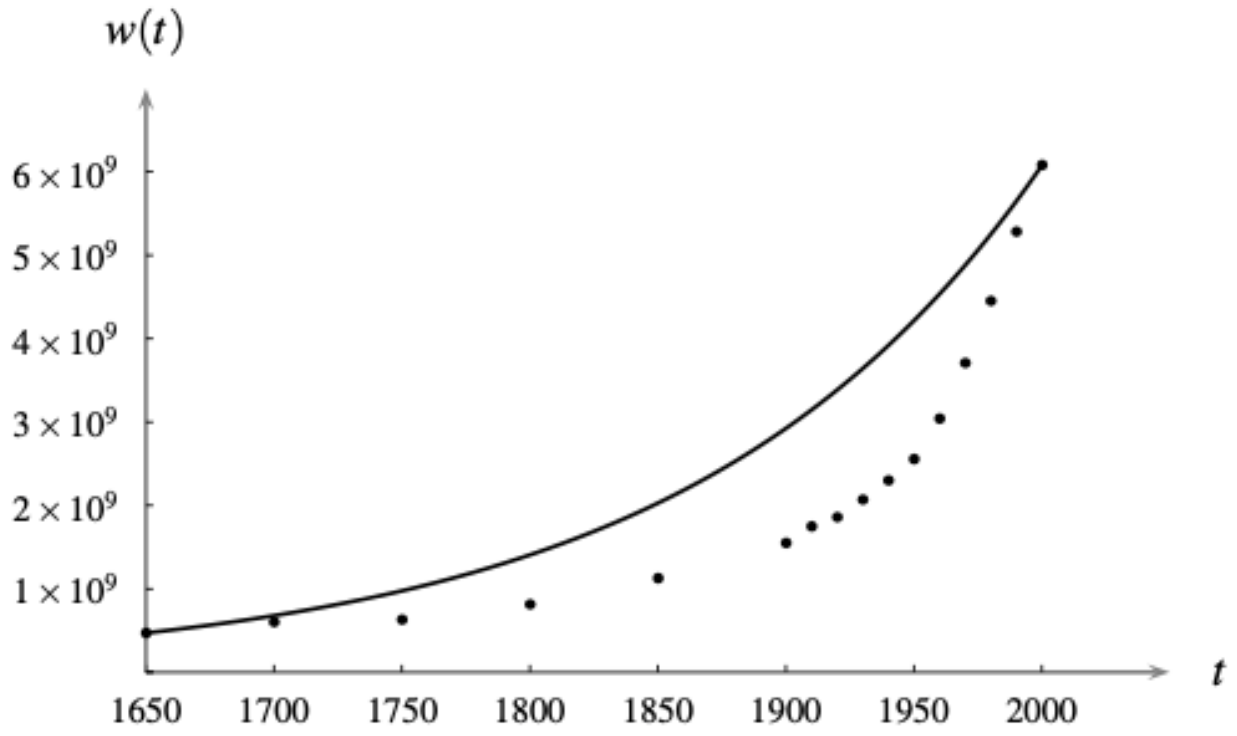
$$\alpha = \frac{\ln(w(t_1)) - \ln(w(t_0))}{t_1 - t_0}$$

Mit den Anfangsbedingungen aus den Daten für die Größe der Weltbevölkerung:

$$\alpha = \frac{\ln(w(t_1)) - \ln((w(t_0))}{t_1 - t_0} = \frac{\ln(6081527896) - \ln(470000000)}{2000 - 1650} \approx 0{,}00731508$$

$$w(t) = w_0 e^{\alpha(t-t_0)} = 470000000 * e^{0{,}00731508(t-1650)}$$

Überprüfen mit der Realität



Quelle: Ortlieb et al (2013): Mathematische Modellierung. S. 130

Fehlerquellen der bisherigen Modellierung

Eigenschaften des exponentiellen Wachstums:

1. Konstante Verdopplungszeit
2. Linearität der logarithmierten Daten

Eigenschaft 1: Verdopplungszeit

Verdopplungszeit ist bei exponentiellem Wachstum konstant, d.h.

$$w(t_1) = 2 * w(t_0)$$

$$\Leftrightarrow w_0 e^{\alpha(t_1 - t_0)} = 2w_0$$

$$\Leftrightarrow t_1 - t_0 = \frac{\ln(2)}{\alpha} = konst.$$

Tatsächliche Verdopplungszeiten

1804 (1 Milliarde) – 1922 (2 Milliarden)

→ 118 Jahre

1922 (2 Milliarden) – 1974 (4 Milliarden)

→ 52 Jahre

1959 (3 Milliarden) – 1999 (6 Milliarden)

→ 40 Jahre

Fazit: Verdopplungszeit ist hier nicht konstant

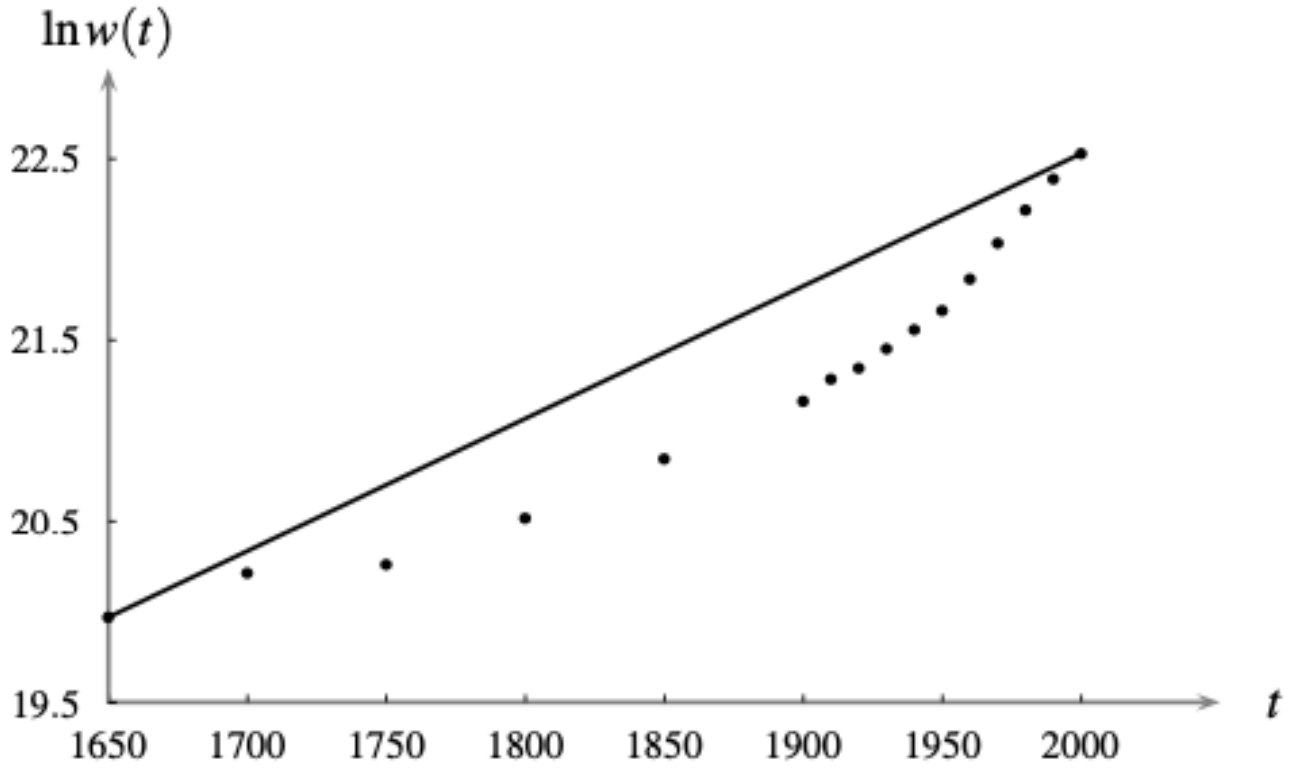
Eigenschaft 2: Linearität der logarithmierten Daten

Für den Logarithmus einer dem exponentiellen Wachstum genügenden Zahl ergibt sich eine Gerade:

$$w(t_1) = w_0 e^{\alpha(t_1 - t_0)}$$

$$\Longrightarrow \ln\big(w(t_1)\big) = \ln(w_0) + \alpha(t_1 - t_0)$$

Überprüfen mit der Realität



Quelle: Ortlieb et al (2013): Mathematische Modellierung. S. 132

Gliederung

1. Grundlagen
2. Erste Modellierungsversuche
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. **Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate**
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. Prognose für das Bevölkerungswachstum
5. Zusammenfassung

Annahme 3: Zeitabhängige Wachstumsrate

Annahme: Wachstumsrate ist zeitabhängig $\Longrightarrow \dot{w}(t) = \alpha(t)w(t)$

oder: $$\alpha(t) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{d}{dt}\ln(w(t))$$

Es gelte zudem $w(t_0) = w_0$. Integration von $\alpha(t)$:

$$\beta(t) := \int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\ln\big(w(s)\big)\,ds = \ln\big(w(t)\big) - \ln(w_0)$$

Mit der Differenzialgleichung und den Anfangsbedingungen:

$$\Longrightarrow w(t) = w_0 e^{\beta(t)}$$

3.1: Tatsächliche Wachstumsrate

$\beta(t)$ist bis auf eine additive Konstante gleich $\ln\big(w(t)\big)$

Näherung für α durch Differenzenquotient:

$$\alpha\left(\frac{t_i - t_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{\ln\big(w(t_{i+1})\big) - \ln(w(t_i))}{t_{i+1} - t_i}$$

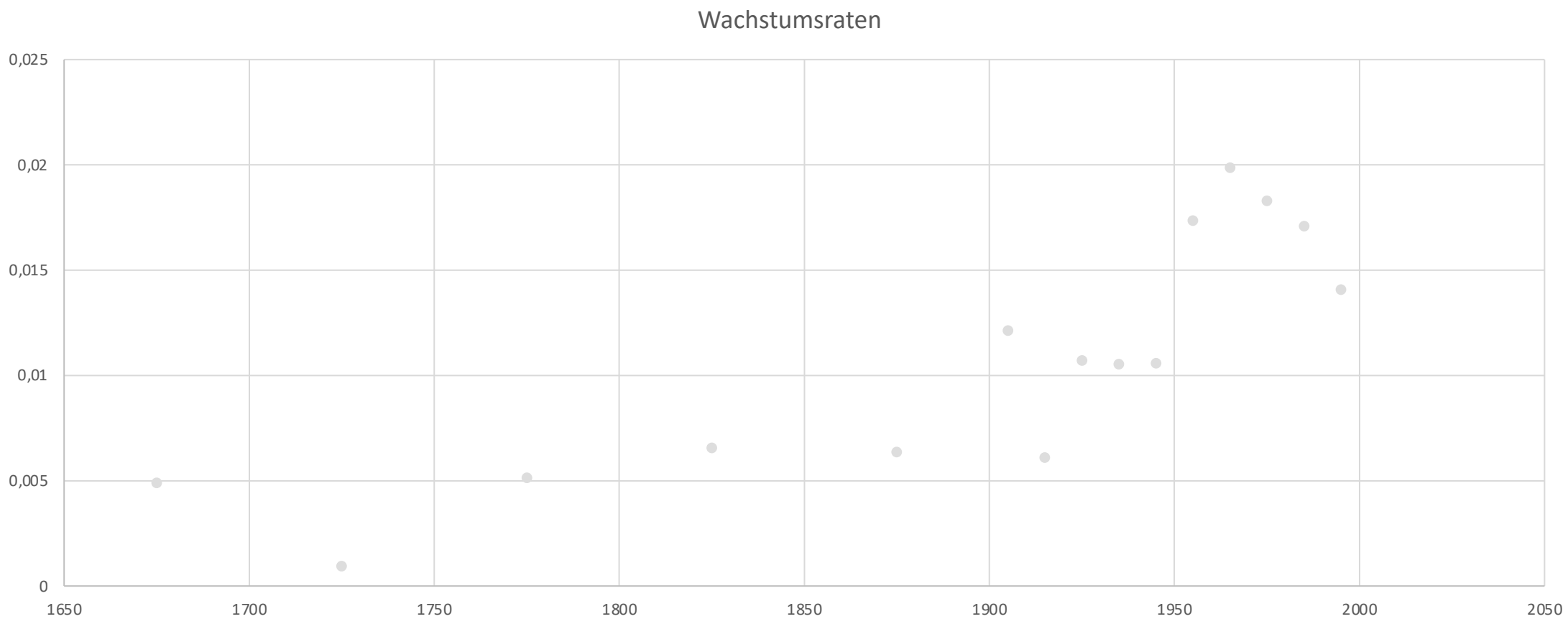
Mit $\alpha(t) = \alpha_i$ *für alle Intervalle* (t_i, t_{i+1}) ergibt sich:

$$w(t_{i+1}) = w(t_i)e^{\alpha_i(t_{i+1} - t_i)}$$

Also:

$$\alpha(t) = \alpha_i = \frac{\ln\big(w(t_{i+1})\big) - \ln(w(t_i))}{t_{i+1} - t_i} \; f\text{ür } alle\ t \in [t_i, t_{i+1}]$$

3.1: Tatsächliche Wachstumsrate



3.2: Modellierung der Wachstumsrate durch Lineare Approximation

Annahme: $\alpha(t)$ ist linear, $\beta(t)$ ist quadratisch

Bestimmen von $\alpha(t), \beta(t)$ über zwei Wege:

- $\alpha(t)$ ergibt sich aus den Daten, $\beta(t) = \int \alpha(t)\, dt$
- $\beta(t)$ ergibt sich aus den Daten, $\alpha(t) = \dot{\beta}(t)$

→ Beide Wege führen nicht zum gleichen Ergebnis!

1. Weg

$\alpha(t)$ist linear $\Longrightarrow \alpha(t) = c + dt$

Minimierung von

Methode der kleinsten Quadrate

$$\sum_i (\alpha\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) - \frac{\ln\big(w(t_{i+1})\big) - \ln\big(w(t_i)\big)}{t_{i+1} - t_i})^2$$

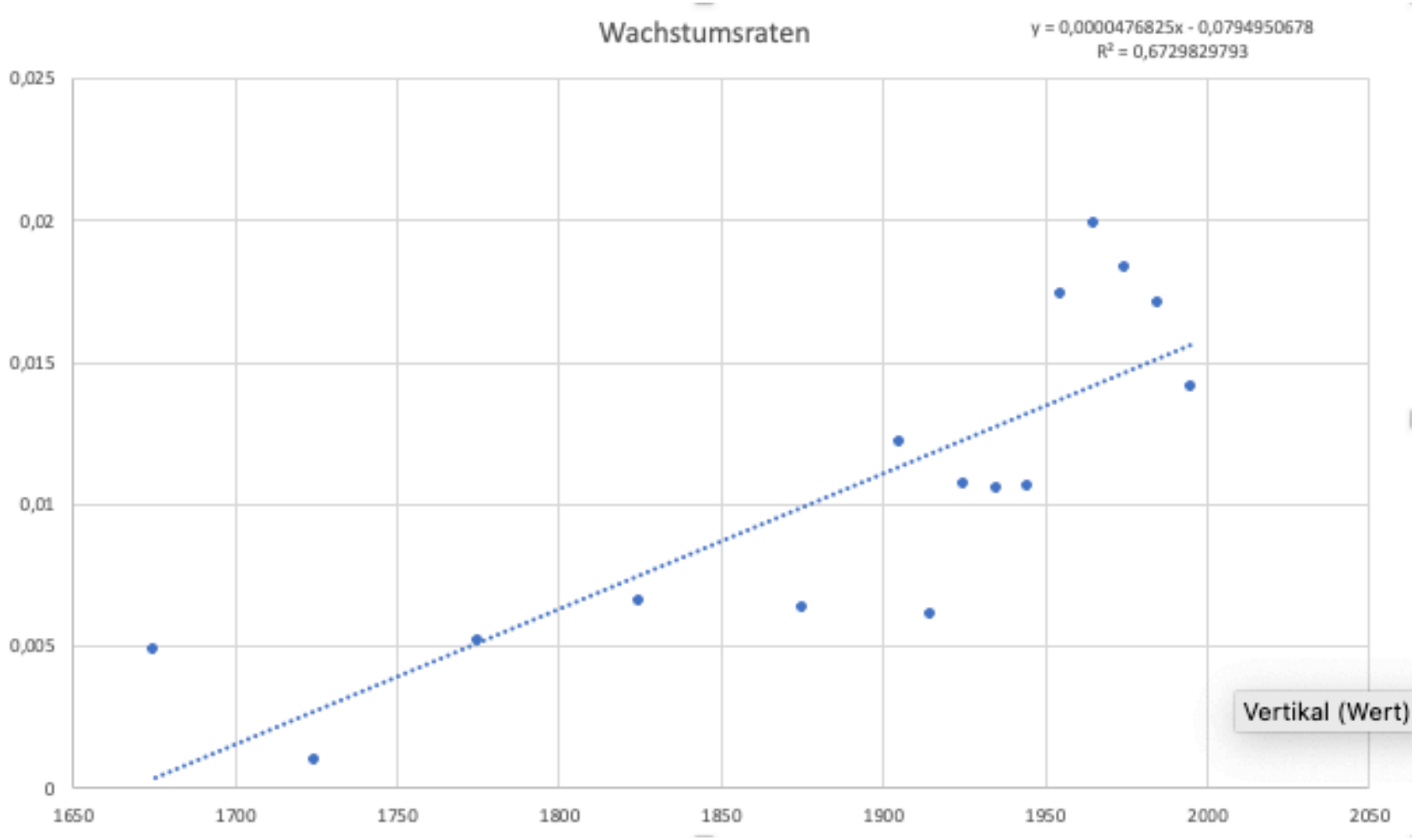
liefert:

$$\alpha(t) = 0{,}0000477t - 0{,}0794951$$

Und entsprechend

$$\beta(t) = 0{,}0000238t^2 - 0{,}0794951t + 66{,}2590235$$

1. Weg


Wachstumsraten
y = 0,0000476825x - 0,0794950678
R² = 0,6729829793
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
1650
1700
1750
1800
1850
1900
1950
2000
2050
Vertikal (Wert)

2. Weg

ß(t)ist quadratisch $\Longrightarrow$ ß$(t) = b + ct + dt^2$

Minimiere analog zu eben:

Methode der kleinsten Quadrate

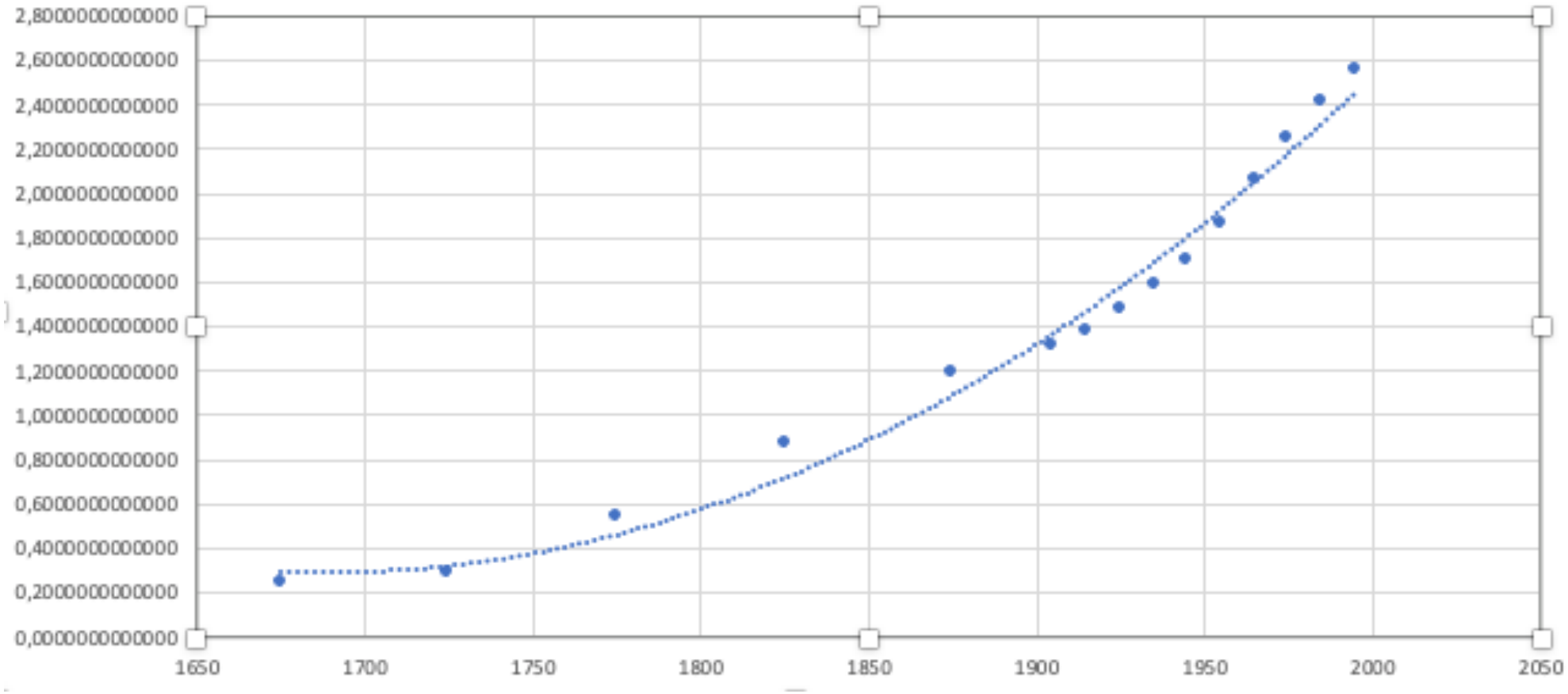
$$\sum_i (ß(t_i) - \ln\big(w(t_i)\big) + \ln\big(w(1650)\big))^2$$

Es ergibt sich:

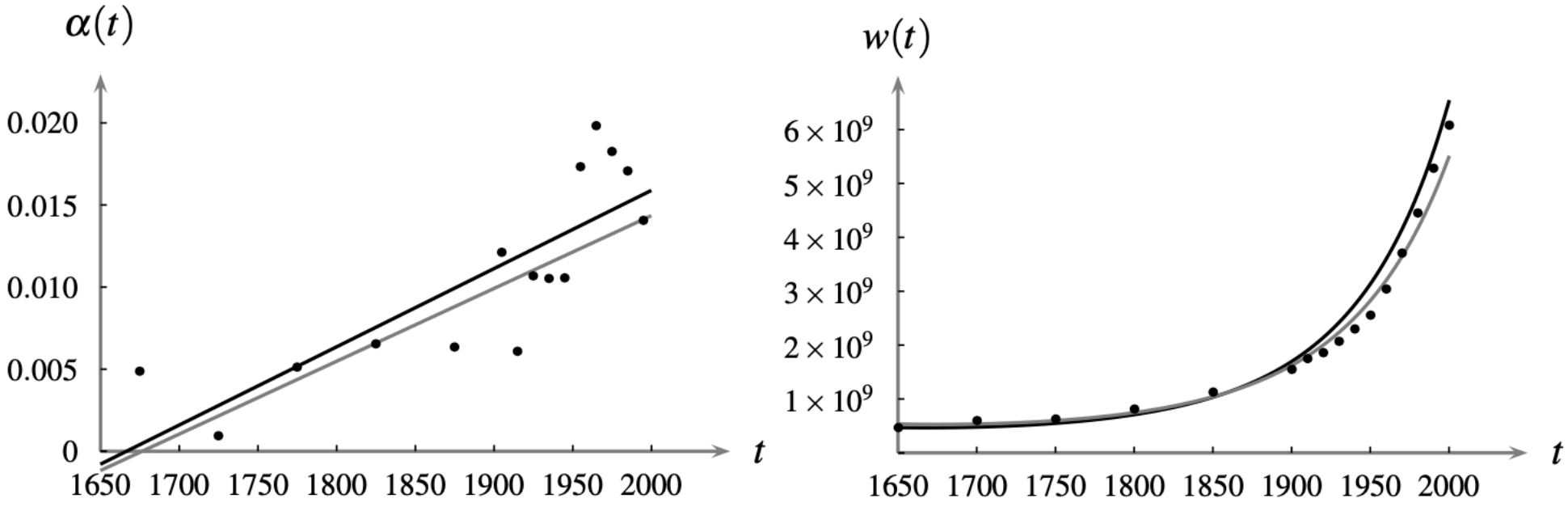
$$\beta(t) = 0{,}0000222t^2 - 0{,}0744362t + 62{,}4642$$

$$\alpha(t) = 0{,}0000444t - 0{,}0744362$$

2. Weg


2,8000000000000
2,6000000000000
2,4000000000000
2,2000000000000
2,0000000000000
1,8000000000000
1,6000000000000
1,4000000000000
1,2000000000000
1,0000000000000
0,8000000000000
0,6000000000000
0,4000000000000
0,2000000000000
0,0000000000000
1650
1700
1750
1800
1850
1900
1950
2000
2050

Überprüfen mit der Realität



Quelle: Ortlieb et al (2013): Mathematische Modellierung. S. 136

Das deskriptive Modell

$$w(t) = w(1650)e^{\beta(t)}$$

Kritik:

- Modell beschreibt lediglich Entwicklung von 1650 bis 2000
- Keinerlei Aussage über Wirkungsmechanismen

Gliederung

1. Grundlagen
2. Erste Modellierungsversuche
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. **Prognose für das Bevölkerungswachstum**
5. Zusammenfassung

Prognose für das Bevölkerungswachstum

Seit 1960 sinkt die Wachstumsrate

→Prognosen sollten diesen Trend aufnehmen

→Berechnung mit den Daten von 1960 – 2000:

$$\beta(t) = -0{,}0000909t^2 + 0{,}3774175t - 390{,}4853$$
$$\alpha(t) = -0{,}0001818t + 0{,}3774175$$

→Mit Hilfe von $w(t) = w(1960)e^{\beta(t)}$ kann eine Prognose stattfinden

Überprüfung mit der Realität

$$w(t) = w(1960)e^{-0{,}0000909t^2+0{,}3774175t-390{,}4853}$$

Für 2010:

$$w(2010) = 3040966466\, e^{-0{,}0000909t^2+0{,}3774175t-390{,}4853}$$
$$= 7.322.562.839$$

Tatsächlich: 6,92 Milliarden (Statista 2021)

Für 2020:

$$w(2020) = 3040966466\, e^{-0{,}0000909t^2+0{,}3774175t-390{,}4853}$$
$$= 8.181.417.150$$

Tatsächlich: 7,79 Milliarden (Statista 2021)

Gliederung

1. Grundlagen
2. Erste Modellierungsversuche
   - lineares Wachstum
   - exponentielles Wachstum
   - Fehlerdiskussion
3. Modellierung mit zeitabhängiger Wachstumsrate
   - Tatsächliche Wachstumsrate
   - Lineare Approximation der Wachstumsrate
   - Deskriptives Modell des Bevölkerungswachstums
4. Prognose für das Bevölkerungswachstum
5. **Zusammenfassung**

Zusammenfassung

- Modellierung mit Zeitabhängiger Wachstumsrate möglich
- Modellierungen sind lediglich deskriptive Modelle
  - Nicht beachtet werden mögliche medizinische Einschnitte oder (Natur-)Katastrophen
- Modellierungen vernachlässigen Gründe des Wachstums

Vielen Dank!

Quellen

Ortlieb, Claus Peter; Caroline von Dresky, Ingenuin Gasser und Silke Günzel (2013): Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien, S. 125-139, Wiesbaden: Springer Spektrum.

Statista (2021): Entwicklung der Weltbevölkerungszahl von Christi Geburt bis zum Jahr 2020(in Milliarden). (Zugrifff über: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/, letzter Zugriff am 18.01.2021).