

Karhunen-Loève-Entwicklung

von Alexander Borries am 23.01.2023

Betrachte auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ das elliptische RWP

$$\begin{aligned} -\nabla(a(x) \cdot \nabla u(x)) &= f(x) & , x \in D \\ u(x) &= g(x) & , x \in \partial D \end{aligned}$$

Es seien a, f $L^2(D)$ -wertige Zufallsfelder 2. Ordnung, welche wir durch die Karhunen-Loève-Entwicklung approximieren wollen. Betrachte also a mit $\mu_a(x) = \mathbb{E}[a(x)]$ und Kovarianzfunktion

$$C_a(x_1, x_2) = \mathbb{E}[(a(x_1) - \mu_a(x_1))(a(x_2) - \mu_a(x_2))].$$

Für den resultierenden Kovarianzoperator

$$(\mathcal{C}_a \phi)(x) = \int_D C_a(x, y) \phi(y) dy$$

existiert dann eine ONB von Eigenfunktionen ϕ_k^a mit zugehörigen Eigenwerten ν_k^a , s.d

$$a(x, \omega) = \mu_a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\nu_k^a} \phi_k^a \xi_k(\omega)$$

mit absteigenden Eigenwerten $\nu_1^a \geq \nu_2^a \geq \dots$ und unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\nu_k^a}} \langle a(x, \omega) - \mu_a(x), \phi_k^a(x) \rangle_{L^2(D)}$ die Karhunen-Loève-Entwicklung von a ist. Gehe für f analog vor. Wir approximieren dann a und f durch Abschneiden der Reihen bei $P, N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, \omega) &= \mu_a(x) + \sum_{k=1}^P \sqrt{\nu_k^a} \phi_k^a \xi_k(\omega) \\ \tilde{f}(x, \omega) &= \mu_f(x) + \sum_{k=1}^P \sqrt{\nu_k^f} \phi_k^f \xi_k(\omega) \end{aligned}$$

Betrachte nun die oft nützlichere Variationsformulierung des elliptischen RWP: Finde $\tilde{u} \in L^2(\Omega, H_g^1(D)) =: W$, s.d.

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{u}, v) &= \tilde{l}(v) & \forall v \in L^2(\Omega, H_0^1(D)) =: V \\ \tilde{a} : W \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{a}(\tilde{u}, v) &= \mathbb{E} \left[\int_D \tilde{a}(x, \cdot) \nabla u(x, \cdot) \nabla v(x, \cdot) dx \right] \\ \tilde{l} : V &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{l}(v) &= \mathbb{E} \left[\int_D \tilde{f}(x, \cdot) v(x, \cdot) dx \right] \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert eine eindeutige schwache Lösung, falls \tilde{l} ein beschränktes, lineares Funktional und \tilde{a} eine beschränkte, koerzitive Bilinearform.

Ist $\tilde{a}(x, \omega)$ positiv, so sind alle Bedingungen erfüllt. Dies ist auch physikalisch sinnvoll, da \tilde{a} oft den Diffusionskoeffizienten beschreibt. Wäre dieser negativ, so hätten wir eine Konzentration statt einer Diffusion. Damit

$$0 < \tilde{a}_{min} \leq \tilde{a} \leq \tilde{a}_{max} \leq \infty,$$

nehmen wir an, dass $\xi_k \in [-\gamma, \gamma]$. Dieses $0 < \gamma < \infty$ muss dann so gewählt werden, dass \tilde{a} die Bedingung erfüllt.

Wir betrachten nun den Fehler der Approximation der Lösung durch die abgeschnittene Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{min}|u - \tilde{u}|_W^2 &= \tilde{a}(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \\ &= \tilde{a}(u, u - \tilde{u}) - \tilde{a}(\tilde{u}, u - \tilde{u}) \\ &= \underbrace{\tilde{a}(u, u - \tilde{u}) - a(u, u - \tilde{u})} + \underbrace{\tilde{l}(u - \tilde{u}) - l(u - \tilde{u})} \end{aligned}$$

Da $u - \tilde{u} = 0$ auf ∂D , können wir die Poincaré-Ungleichung anwenden:

$$\begin{aligned} \tilde{l}(u - \tilde{u}) - l(u - \tilde{u}) &\leq \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} \\ &\leq K_p \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} |u - \tilde{u}|_W, \quad K_p > 0 \end{aligned}$$

Mit $\tilde{a}(u, u - \tilde{u}) - a(u, u - \tilde{u}) \leq \|a - \tilde{a}\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))} |u|_W |u - \tilde{u}|_W$ folgt

$$|u - \tilde{u}|_W \leq \frac{K_p}{\tilde{a}_{min}} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} + \frac{1}{\tilde{a}_{min}} \|a - \tilde{a}\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))} |u|_W$$

Da die Karhunen-Loève-Entwicklung L^2 -normierte Eigenfunktionen und absteigende Eigenwerte verwendet, ist sie offensichtlich L^2 -konvergent und somit

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} = \mathbb{E}[\|f - \tilde{f}\|_{L^2(D)}] \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|a - \tilde{a}\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))} &= \operatorname{ess\,sup}_{(x, \omega) \in D \times \Omega} \left| \sum_{k=P+1}^{\infty} \sqrt{\nu_k^a} \phi_k^a \xi_k(\omega) \right| \\ &\leq \gamma \sum_{k=P+1}^{\infty} \sqrt{\nu_k^a} \|\phi_k^a\|_\infty \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte abnehmend sind und wir $\|\phi_k^a\|_\infty$ i.A. als wachsend annehmen, müssen wir die Sink- bzw. Wachstumsraten gegeneinander abschätzen.

Sei dazu die Kovarianz $C \in C^{2q}(D \times D)$. Dann existiert für $2q > r > \frac{d}{2}$, d die Raumdimension, eine Konstante $K > 0$, s.d.

$$\|\phi_k^a\|_\infty \leq K \nu_k^{-\frac{r}{2q-r}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Wir gehen hier nicht näher auf die Herleitung ein. Ähnliche Abschätzungen sind auch aus der Numerik bekannt.

Oft ist das Problem, dass diese Eigenwerte und -funktionen gar nicht erst bekannt sind und numerisch approximiert werden müssen. Um das zu umgehen, bietet es sich manchmal an, den umgekehrten Weg zu gehen und explizite Eigenpaare zu wählen, deren Kovarianz die gewünschte Kovarianz approximiert.

Beispielsweise kann man die stationäre Kovarianz $c(x) = \frac{1}{2l} \exp(\frac{-\pi x^2}{4l^2})$, l Korrelationslänge, approximieren mit

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{2} & \nu_k &= \frac{1}{2} \exp(-\pi k^2 l^2) \\ \phi_0 &= 1 & \phi_k(x) &= \sqrt{2} \cos(\pi k x). \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Anwendung des Galerkin-Verfahrens ist unser nächstes Problem, dass Ω ein abstrakter Raum ist. Wir stellen fest, dass

$$\xi_k : \Omega \rightarrow \Gamma_k \subset \mathbb{R}.$$

Wir wollen also einen Variablenwechsel von $\omega \in \Omega$ zu $y \in \Gamma := \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_M \subset \mathbb{R}^M$.

Formulieren wir nun das schwache Problem nach Variablenwechsel auf $D \times \Gamma$. Dabei bekommen wir das Gewicht ρ , welches die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_M]^T$ ist. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{u} \in W &:= L_\rho^2(\Gamma, H_g^1(D)) \\ &= \{v : D \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} : \int_\Gamma \rho(y) \|v(\cdot, y)\|_{H^1(D)}^2 dy < \infty, \gamma v = g\} \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} (*) \quad \tilde{a}(\tilde{u}, v) &= \tilde{l}(v) & \forall v \in L_\rho^2(\Gamma, H_0^1(D)) &=: V \\ \tilde{a} : W \times V &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{a}(\tilde{u}, v) &= \int_\Gamma \rho(y) \int_D \tilde{a}(x, y) \nabla u(x, y) \nabla v(x, y) dx dy \\ \tilde{l} : V &\rightarrow \mathbb{R}, & \tilde{l}(v) &= \int_\Gamma \rho(y) \int_D \tilde{f}(x, y) v(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Existenz und Eindeutigkeit sind unter der Beschränktheitsannahme für \tilde{a} analog zu davor klar.

Um das Problem auf $D \times \Gamma$ zu diskretisieren, benötigen wir Finite-Elemente-Räume $V^h \subset H_0^1(D)$, $W^h \subset H_g^1(D)$, wobei h für den Gitterparameter steht. Dies liefert uns zunächst das semidiskrete Problem:

Finde $\tilde{u}_h \in L_\rho^2(\Gamma, W^h)$, s.d.

$$(**) \quad \tilde{a}(\tilde{u}_h, v) = \tilde{l}(v) \quad \forall v \in L_\rho^2(\Gamma, V^h) \subset V.$$

Auch hier sind Existenz und Eindeutigkeit klar. Fasst man nun (*) und (**) zusammen, so erhält man

$$\tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, v) = 0 \quad \forall v \in L_\rho^2(\Gamma, V^h)$$

Dies nennt man auch die Galerkin-Orthogonalität. Natürlich müssen V^h und W^h so gewählt werden, dass

$$v - w \in L_\rho^2(\Gamma, V^h) \quad \forall v, w \in L_\rho^2(\Gamma, W^h),$$

die Räume in dieser Hinsicht also kompatibel sind.

Ist dies der Fall, so kann man zeigen, dass \tilde{u}_h die beste Approximation im Unterraum ist. Sei dazu $w \in L_\rho^2(\Gamma, W^h)$ und $|\cdot|_E$ die durch \tilde{a} induzierte Energienorm. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{u} - \tilde{u}_h|_E &= \tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &= \tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - w) + \underbrace{\tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, w - \tilde{u}_h)}_{\in L_\rho^2(\Gamma, V^h)} \\ &= \tilde{a}(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - w) \\ &\leq |\tilde{u} - \tilde{u}_h|_E |\tilde{u} - w|_E \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also $|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_E = \inf_{w \in L_\rho^2(\Gamma, W^h)} |\tilde{u} - w|_E$.

Es ist also \tilde{u}_h die beste Approximation bis auf eine von den Daten abhängige Konstante.

Jetzt brauchen wir noch eine Fehlerabschätzung für $|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_W$.

Theorem: Seien $\tilde{u} \in L_\rho^2(\Gamma, H_g^1(D))$, $\tilde{u}_h \in L_\rho^2(\Gamma, W^h)$ die schwachen, eindeutigen Lösungen von (*), (**), $0 < \tilde{a}_{min} \leq \tilde{a}(x, y) \leq \tilde{a}_{max} \leq \infty$ und es gelte

$$|\tilde{u}|_{L_\rho^2(\Gamma, H^2(D))} \leq K_2 \|f\|_{L_\rho^2(\Gamma, L^2(D))},$$

wobei $K_2 > 0$ eine von y unabhängige Konstante ist. Dann ist für global stetige, stückweise lineare Finite-Elemente-Räume $V^h \subset H_0^1(D)$, $W^h \subset H_g^1(D)$ und Triangulation \mathcal{T}_h mit regulär geformten Dreiecken

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_h|_W \leq K \sqrt{\frac{\tilde{a}_{max}}{\tilde{a}_{min}}} h \|\tilde{f}\|_{L_\rho^2(\Gamma, L^2(D))},$$

$K > 0$ konstant und unabhängig von h .

Beweisskizze: Durch Abschätzungen auf den einzelnen Dreiecken der Triangulation können wir folgendermaßen abschätzen

$$\begin{aligned} |\tilde{u} - \tilde{u}_h|_W^2 &= \int_\Gamma \rho(y) \underbrace{(|\tilde{u}(\cdot, y) - \tilde{u}_h(\cdot, y)|_{H^1(D)})^2}_{\leq Kh \sqrt{\frac{\tilde{a}_{max}}{\tilde{a}_{min}}} |u(\cdot, y)|_{H^2(D)}} dy \\ &\leq K^2 h^2 \frac{\tilde{a}_{max}}{\tilde{a}_{min}} \int_\Gamma \rho(y) |u(\cdot, y)|_{H^2(D)}^2 dy \\ &\leq K^2 h^2 \frac{\tilde{a}_{max}}{\tilde{a}_{min}} |u|_{L_\rho^2(\Gamma, H^2(D))}^2 \end{aligned}$$

Durch Ziehen der Wurzel und Anwendung der Abschätzung erhalten wir die Aussage. \square

Abschließend formulieren wir das diskrete, endlich-dimensionale Problem. Bezeichne als stochastische Galerkin-Lösung die Funktion $\tilde{u}_{hk} \in W^{hk} \subset W = L_\rho^2(\Gamma, H_g^1(D))$, die

$$\tilde{a}(\tilde{u}_{hk}, v) = \tilde{l}(v) \quad \forall v \in V^{hk} \subset V = L_\rho^2(\Gamma, H_0^1(D))$$

löst. Analog zu davor sind Existenz und Eindeutigkeit sowie die Eigenschaft, die beste Approximation zu sein, klar. Es bleiben die Räume V^{hk} und W^{hk} zu wählen. Betrachte dazu

$$V^h = \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_J\} \subset H_0^1(D),$$

mit ϕ_i den Finite-Elemente-Basisfunktionen, und

$$S^k = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_Q\} \subset L_\rho^2(\Gamma),$$

einen Q -dimensionalen Unterraum von $L_\rho^2(\Gamma)$, ψ_i seien hier bspw. stochastische Basisfunktionen. Dann sei

$$V^{hk} := V^h \otimes S^k = \text{span}\{\phi_i \psi_j : i = 1, \dots, J, j = 1, \dots, Q\}$$

unser $J \cdot Q$ -dimensionaler Testraum. Erweitere für W^{hk} um die Finite-Elemente-Basisfunktionen für die Randbedingung

$$W^{hk} := V^{hk} \oplus \text{span}\{\phi_{J+1}, \dots, \phi_{J+J_b}\}.$$

Elemente aus W^{hk} haben dann die Form

$$w(x, y) = \underbrace{\sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^Q w_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y)}_{w_0(x, y) \in V^{hk}} + \underbrace{\sum_{i=J+1}^{J+J_b} w_i \phi_i(x)}_{w_g(x)}.$$

Quelle: "An Introduction to Computational Stochastic PDEs" von G.J. Lord, C.E. Powell and T. Shardlow, Cambridge University Press, 2014 (p. 389-399)