



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

# Finite Volumen Approximation von hyperbolischen Erhaltungssätzen

---

HAUPTSEMINAR: DATENBASIERTE  
MATHEMATISCHE MODELLIERUNG

SON TUNG NGUYEN  
06. FEBRUAR 2023

# Agenda

---

1. Einleitung
2. Theorie: Erhaltungsgleichungen
3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden
4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden
5. Zusammenfassung und Ausblick
6. Quellenangaben

# 1. Einleitung

---

## 1.1. Thema

- Partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ mithilfe numerischer Verfahren lösen (Numerik partieller Differentialgleichungen).
- Anwendungsbeispiele: Modellierung in der Physik, z.B. Beschreibung eines advektiven Stofftransports oder Wellenbewegung.
- Hyperbolischer Erhaltungssatz. Einfachstes Beispiel:  $q_t + f(q)_x = 0$ .
- Erhaltungvariable:  $q: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und Flussfunktion:  $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .
- Bei nichtlinearen Flussfunktionen sind Lösungen nicht immer glatt und es existieren unstetige Lösungen.
- Forschungsfrage: Wie gut approximiert eine Lösung eines numerischen Verfahrens, die glatt oder unstetig ist, die exakte Lösung?

# 1. Einleitung

---

## 1.2. Ziel

- Forschungsfrage untersuchen.
- Konvergenzordnung der numerischen Verfahren mithilfe eines Fehlerplots ermitteln.

## 1.3. Aufbau

1. Theoretische Grundlagen der Erhaltungsgleichungen und Beispiele
2. Theoretischen Grundlagen der konservativen Finite-Volumen-Methode und dazu Verfahren mit unterschiedlichen Flussfunktionen
3. Numerische Resultate der Finite-Volumen-Methode

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.1. Ein Erhaltungssatz

- Sei  $q$  eine Dichte. Masse:  $m := \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx$ .
- Fluss beschreibt Änderung der Masse nach der Zeit:  $f = \frac{m}{t}$ .
- Integralform:  $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$ .
- Wenn  $q$  und  $f(q)$  hinreichend glatt sind:
  - $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) dx$
  - $\Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) \right] dx = 0$ .
- Differentialform:  $q_t + f(q)_x = 0$ .

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.2. Hyperbolisches System

- $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix}$ .

- Das System  $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$  kann als quasilineares System geschrieben werden:

$$\mathbf{q}_t + A(\mathbf{q})\mathbf{q}_x = 0.$$

- Definition (Hyperbolisch): Das System heißt hyperbolisch, wenn  $s$  reelle Eigenwerte der Matrix  $A(\mathbf{q})$  existieren und diese diagonalisierbar ist, dementsprechend gibt es eine nicht

singuläre Matrix  $T$  mit  $T^{-1}A(\mathbf{q})T = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix}$ .

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.3. Beispiele für eine skalare Erhaltungsgleichung

Differentialform:  $q_t + f(q)_x = 0$ .

- Lineare Flussfunktion:  $f(q) = \bar{u}q$ . Geschwindigkeit  $\bar{u} \in \mathbb{R}$  konstant, Advektionsgleichung:  $q_t + \bar{u}q_x = 0$ .
- Mit variablen Koeffizienten:  $q_t + (u(x)q)_x = 0$ .
- Nichtlineare Flussfunktion:  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , Burgers Gleichung:  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ .
- Frage: Wie kann man von der Advektionsgleichung und Burgers Gleichung die exakte Lösung bestimmen?

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.4. Methode der Charakteristik für Advektionsgleichung

Advektionsgleichung:  $q_t + \bar{u}q_x = 0$ .

Definition (Charakteristik): Die Charakteristik  $X(t)$  der Advektionsgleichung wird als eine von der Zeit  $t$  abhängige Kurve  $X(t) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0 + \bar{u}t, x_0 \in \mathbb{R}\}$  definiert. Diese kann auch als Geradengleichung  $X(t) = x_0 + \bar{u}t, x_0 \in \mathbb{R}$  formuliert werden. Zudem ist die Ableitung der Charakteristik  $X'(t) = \bar{u}$  konstant.

- $q(x, t)$  ist entlang der Charakteristik konstant, da

$$\frac{d}{dt}q(X(t), t) = q_t(X(t), t) + X'(t)q_x(X(t), t) = q_t + \bar{u}q_x = 0.$$

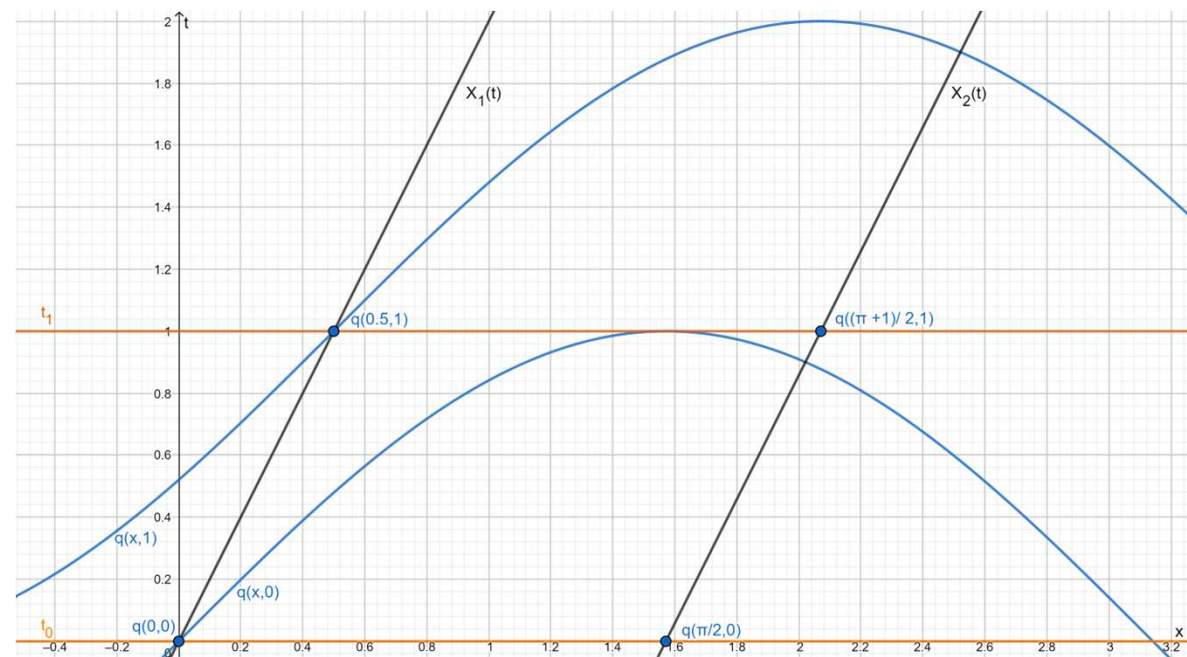
- Sei  $q(x, t_0) = \tilde{q}(x)$  die Anfangsbedingung.
- Exakte Lösung:  $q(x, t) = \tilde{q}(x - \bar{u}(t - t_0))$ .



# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

## 2.4. Methode der Charakteristik für Advektionsgleichung

Beispiel:  $\bar{u} = 0.5$  und  $q(x, 0) = \sin(x)$ . Exakte Lösung:  $q(x, t) = \sin(x - 0.5t)$ .



# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.5. Methode der Charakteristik für Burgers Gleichung

- Burgers Gleichung:  $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$  mit Anfangsbedingung  $u(x, 0) = \tilde{u}(x)$ .
- Charakteristik:  $X(t) = x_0 + f'(u(X(t), t))t = x_0 + u(X(t), t)t$ .
- Lösungen entlang der Charakteristik konstant, da
$$\frac{d}{dt}u(X(t), t) = u_t(X(t), t) + X'(t)u_x(X(t), t) = u_t + uu_x = 0$$
$$\Rightarrow u(X(t), t) = u(X(0), 0) = u(x_0, 0) = \tilde{u}(x_0).$$
- In Charakteristik einsetzen:  $x = X(t) = \tilde{u}(x_0)t + x_0 \Leftrightarrow \tilde{u}(x_0)t + x_0 - x = 0$ .
- Exakte Lösung:  $u(x, t) = \tilde{u}(x_0)$ , wobei  $x_0$  das Nullstellenproblem löst.

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.6. Arten von Lösungen

- Anfangsbedingung:  $q(x, 0) = \tilde{q}(x)$ . Funktion  $q$  klassische Lösung, wenn sie das Cauchy-Problem punktweise löst.
- Bei einer Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten oder bei Burgers Gleichung existieren unstetige Lösungen aufgrund der Nichtlinearität von  $q$  und  $f(q)$ .
- Neue Art von Lösungen: Schwache Lösung, welche aus der Integralform
- $\int_{x_1}^{x_2} [q_t + f(q)_x] dx = 0$  hergeleitet wird.

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.6. Arten von Lösungen

- Schwache Lösung:  $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [q\varphi_t + f(q)\varphi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty q(x, 0)\varphi(x, 0) dx = 0$   
für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$ .
- Mehrere Lösungen möglich. Frage: Wie bestimmt man die eindeutige Lösung?

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

## 2.7. Entropie

- Definition: Eine konvexe Funktion  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird die Entropie genannt, wenn ein Entropiefluss  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass folgende Gleichung gilt:

$$\psi'(q) = \eta'(q)f'(q).$$

- Schwache Entropielösung:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\eta(q)\varphi_t + \psi(q)\varphi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty \eta(q(x,0))\varphi(x,0) dx \geq 0$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R})$ ,  $\varphi \geq 0$ .

- Satz: Die schwache Entropielösung ist für eine skalare Gleichung und für ein eindimensionales System eindeutig.

# 2. Theorie: Erhaltungsgleichungen

---

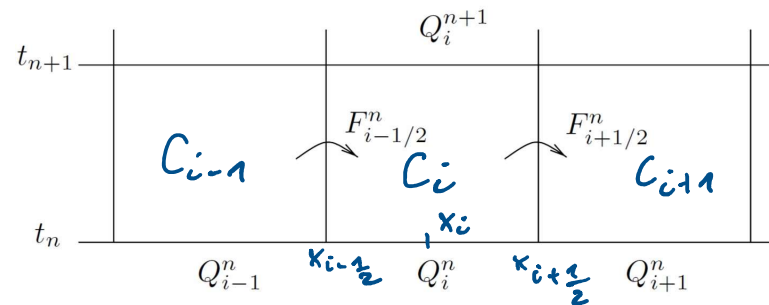
## 2.7. Entropie

Beispiel: Burgers Gleichung  $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$ .

- Entropie:  $\eta(u) = u^2$ . Konvex, da  $\eta''(u) = 2 > 0$ .
- Entropiebedingung:  $\psi'(u) = \eta'(u)f'(u) = 2u * u = 2u^2$ .
- Entropiefluss:  $\psi(u) = \frac{2}{3}u^3$ .

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

## 3.1. Allgemeine Formulierung

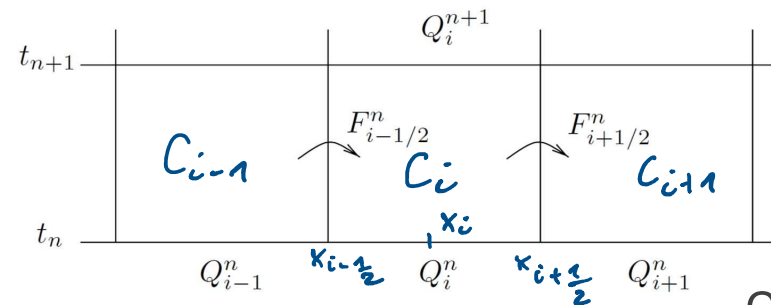


Quelle: [1, S. 65, Abb. 4.1.]

- Gitterzelle:  $C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ ,  $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$ .
- Aus der Integralform  $\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$  kann die konservative Finite-Volumen-Methode hergeleitet werden.

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

## 3.1. Allgemeine Formulierung



Quelle: [1, S. 65, Abb. 4.1.]

- Konservative Finite-Volumen-Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$ , wobei

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_n) dx \text{ und } F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(q\left(x_{i-1/2}, t\right)\right) dt.$$

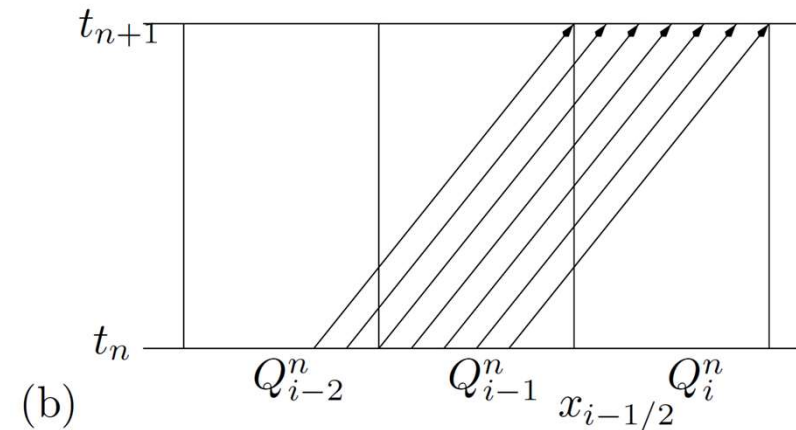
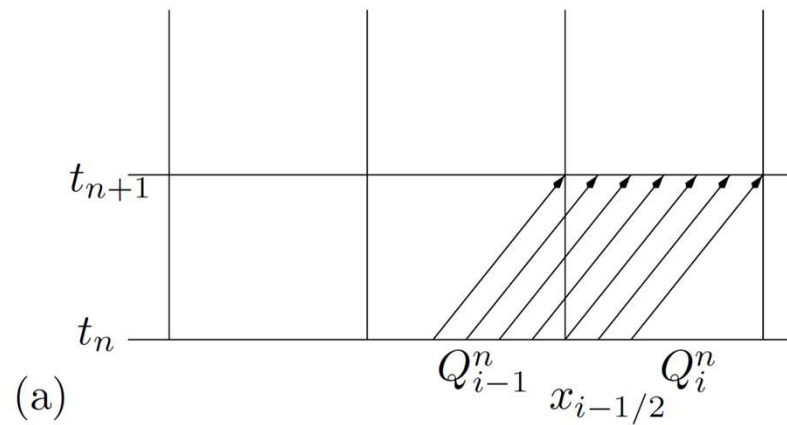
- $Q_i^n$  Zellmittelwert an der Stelle  $x_i$  zu der Zeit  $t_n$  und  $F_{i-1/2}^n$  numerischer Fluss.



# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

## 3.2. CFL-Bedingung

- Konvergenz = Stabilität + Konsistenz.



Quelle: [1, S. 69, Abb. 4.2.]

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

## 3.2. CFL-Bedingung

- Tatsächlicher Abhängigkeitsbereich: Für ein lineares System ist der Abhängigkeitsbereich  $\mathcal{D}(\tilde{x}, \tilde{t})$  an Punkt  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  definiert als

$$\mathcal{D}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \{\tilde{x} - \lambda_p \tilde{t}; p = 1, 2, \dots, s\}.$$

- Numerischer Abhängigkeitsbereich: Der numerische Abhängigkeitsbereich an Punkt  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  wird als das Intervall  $\tilde{x} - \frac{\tilde{t}}{r} \leq x \leq \tilde{x} + \frac{\tilde{t}}{r}$  mit  $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  definiert, von dem die Lösung an Punkt  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  abhängig ist.
- Die CFL-Bedingung (Courant, Friedrichs, Lewy) ist eine notwendige Bedingung für die Stabilität: Für  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  schließt der numerische Abhängigkeitsbereich den tatsächlichen Abhängigkeitsbereich ein.

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

## 3.2. CFL-Bedingung

- Nach CFL-Bedingung:  $\mathcal{D}(\tilde{x}, \tilde{t}) \in [\tilde{x} - \frac{\tilde{t}}{r}, \tilde{x} + \frac{\tilde{t}}{r}]$ .
- $\implies \tilde{x} - \frac{\tilde{t}}{r} \leq \tilde{x} - \bar{u}\tilde{t} \leq \tilde{x} + \frac{\tilde{t}}{r}$ .
- Courant-Zahl:  $\nu := \left| \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \iff \Delta t \leq \frac{\Delta x}{\bar{u}}$ .

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

Konservative Finite-Volumen-Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$ .

## 3.3. Ein instabiler Fluss

- Numerischer Fluss  $F_{i-\frac{1}{2}}^n$  wird als Mittelwert vom Fluss  $f(Q_{i-1}^n)$  und  $f(Q_i^n)$  definiert:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)].$$

Finite-Volumen-Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n))$ .

- Von-Neumann Stabilitätsanalyse zeigt, dass dieses Verfahren instabil ist.

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

Konservative Finite-Volumen-Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$ .

## 3.4. Lax-Friedrichs Methode

- $Q_i^n \approx \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n)$ .
- Lax-Friedrichs Methode:  $Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n))$ .
- Numerische Flussfunktion:  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_i^n - Q_{i-1}^n)$ .
- Die Von-Neumann Stabilitätsanalyse zeigt, dass dieses Verfahren stabil ist.
- Zentrierte Methode, Konvergenzordnung eins.

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

## 3.5. 2-Schritt Lax-Wendroff Methode von Richtmyer

- Zentrierte Methode, Konvergenzordnung zwei.

$$1. \quad Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (Q_{i-1}^n + Q_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(Q_i^n) - f(Q_{i-1}^n))$$

$$2. \quad Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}))$$

- Nachteil: Oszilliert bei nichtlinearen Erhaltungsgleichungen, z.B. Burgers Gleichung.
- Brauchen allgemeinere Methode.

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

## 3.6. Lax-Wendroff Methode

- Taylor-Entwicklung:  $q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) + \Delta t q_t(x, t_n) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 q_{tt}(x, t_n)$ .

- Mit  $q_t = -\bar{u}q_x$  und  $q_{tt} = -\bar{u}q_{xt} = -\bar{u}q_{tx} = \bar{u}^2 q_{xx}$ :

$$q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) - \bar{u} \Delta t q_x(x, t_n) + \frac{1}{2} \bar{u}^2 (\Delta t)^2 q_{xx}(x, t_n).$$

- Lax-Wendroff Methode für lineare Flussfunktion:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{u} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \bar{u}^2 (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n).$$

- Mit numerischer Flussfunktion:  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \bar{u}^2 (Q_{i-1}^n - Q_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{u}^2 (Q_i^n - Q_{i-1}^n)$ .

# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

## 3.7. Upwind Methode für Advektion

- Einseitiges Verfahren. Es wird die Richtung betrachtet, aus der die Informationen im Fluss kommen. Konvergenzordnung eins.

- $\bar{u} > 0$ :  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u}Q_{i-1}^n$ .

- Upwind Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} (Q_i^n - Q_{i-1}^n)$ .

- $\bar{u} < 0$ :  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u}Q_i^n$ .

- Upwind Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n)$ .



# 3. Theorie: Finite-Volumen-Methoden

---

## 3.7. Upwind Methode für Advektion

- Zusammengefasst:  $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u}^- Q_i^n + \bar{u}^+ Q_{i-1}^n$ .

mit  $\bar{u}^+ = \max(\bar{u}, 0)$  und  $\bar{u}^- = \min(\bar{u}, 0)$ .

- Upwind Methode:  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{u}^+ (Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \bar{u}^- (Q_{i+1}^n - Q_i^n))$ .

# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

---

## 4.1. Methodik

- Drei numerische Verfahren: Lax-Friedrichs Methode, Lax-Wendroff Methode und Upwind Methode.

- Drei Beispiele:

1. Advektionsgleichung mit  $q(x, 0) = \sin(x)$

2. Burgers Gleichung mit  $u(x, 0) = \sin(x)$

3. Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten  $u(x) = \begin{cases} \bar{\mp}1, & x < 0 \\ \pm 1, & x > 0 \end{cases}$  und  $q(x, 0) = 1$

# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

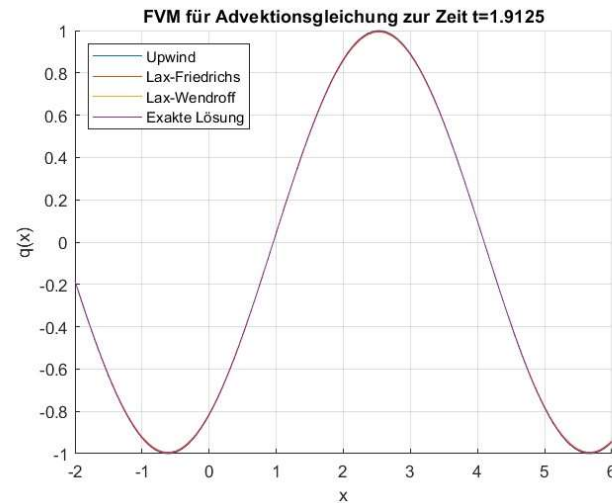
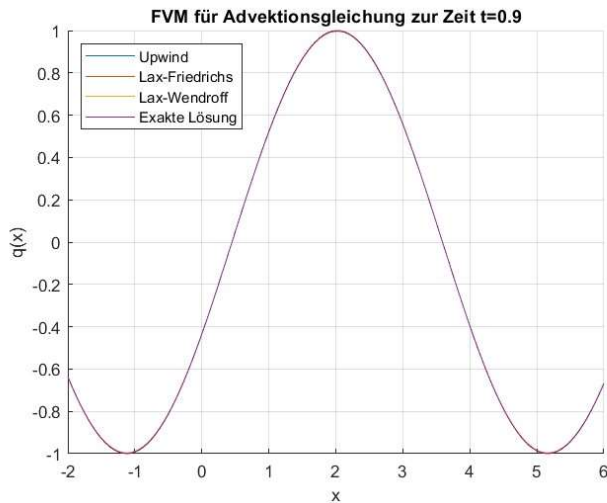
---

## **4.1. Methodik**

- Intervall, Gitterbreite, Ausgabeintervall festlegen. Zeitschritt wird nach CFL-Bedingung berechnet.
- Fehleranalyse mit Fehlertabelle und Fehlerplot, um Konvergenzordnung zu bestimmen.

# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

## 4.2. Numerische Resultate: Advektionsgleichung



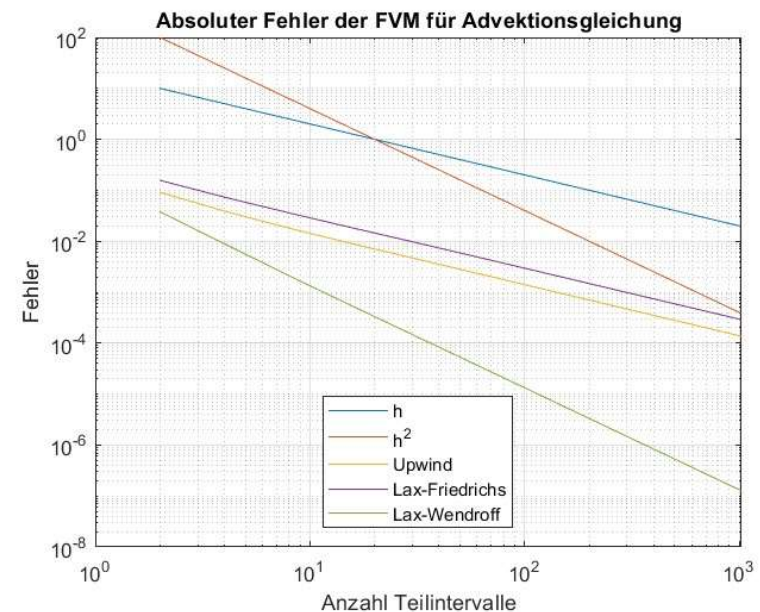
# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

Fehleranalyse:

$$EOC = \frac{\log\left(\frac{\|q_i - q_{ex}\|}{\|q_{i+1} - q_{ex}\|}\right)}{\log\left(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta x)_{i+1}}\right)} \text{ mit absolutem Fehler}$$

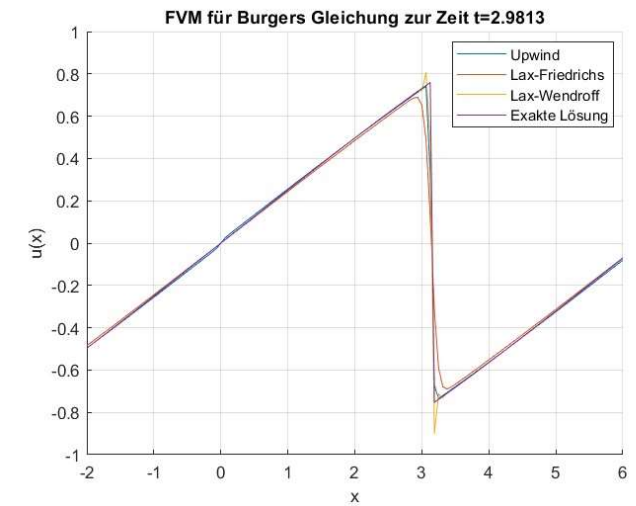
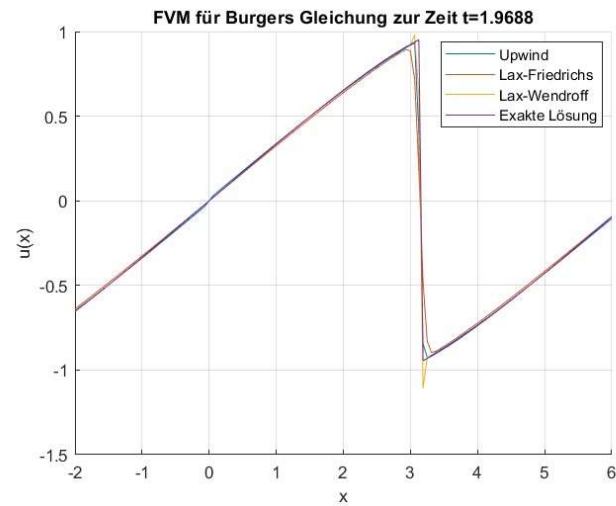
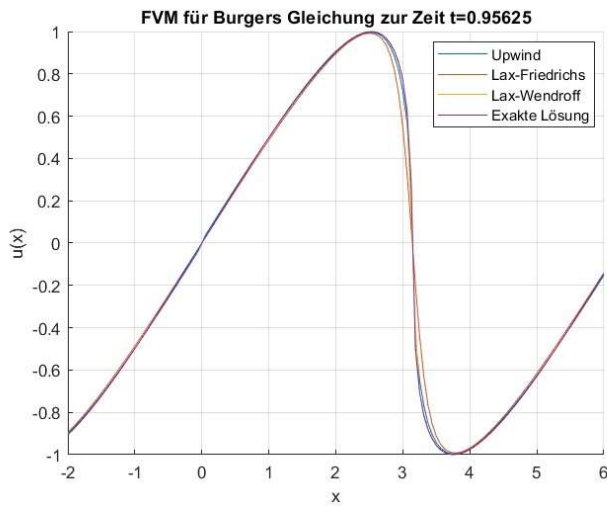
$$\|q_i - q_{ex}\| = \Delta x \sum_{i=1}^N |q_i - q_{ex}|.$$

| Schritt.   | Fehler Upwind | EOC Upwind | Fehler L.-F. | EOC L.-F. | Fehler L.-W. | EOC L.-W. |
|------------|---------------|------------|--------------|-----------|--------------|-----------|
| 0.5000     | 0.1237        | 1.4124     | 0.1912       | 1.2390    | 0.0690       | 2.1004    |
| 0.2500     | 0.0465        | 1.2641     | 0.0810       | 1.1432    | 0.0161       | 2.0519    |
| 0.1250     | 0.0193        | 1.1518     | 0.0367       | 1.0788    | 0.0039       | 2.0279    |
| 0.0625     | 0.0087        | 0.9989     | 0.0174       | 0.9568    | 9.5163e-04   | 2.0113    |
| 0.0313     | 0.0044        | 0.9997     | 0.0089       | 0.9794    | 2.3605e-04   | 2.0062    |
| 0.0156     | 0.0022        | 0.9999     | 0.0045       | 0.9899    | 5.8760e-05   | 2.0032    |
| 0.0078     | 0.0011        | 1.0099     | 0.0023       | 1.0050    | 1.4657e-05   | 2.0019    |
| 0.0039     | 5.4097e-04    | 1.0050     | 0.0011       | 1.0025    | 3.6594e-06   | 2.0010    |
| 0.0020     | 2.6955e-04    | 1.0025     | 5.6807e-04   | 1.0013    | 9.1423e-07   | 2.0005    |
| 9.7656e-04 | 1.3454e-04    | NaN        | 2.8379e-04   | NaN       | 2.2848e-07   | NaN       |



# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

## 4.3. Numerische Resultate: Burgers Gleichung



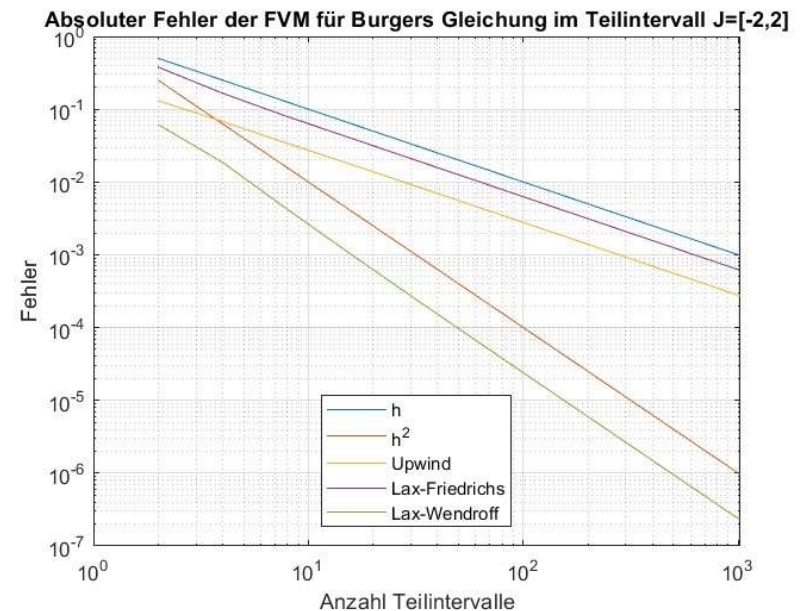
# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

Fehleranalyse:

$$EOC = \frac{\log\left(\frac{\|q_i - q_{ex}\|}{\|q_{i+1} - q_{ex}\|}\right)}{\log\left(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta x)_{i+1}}\right)} \text{ mit absolutem Fehler}$$

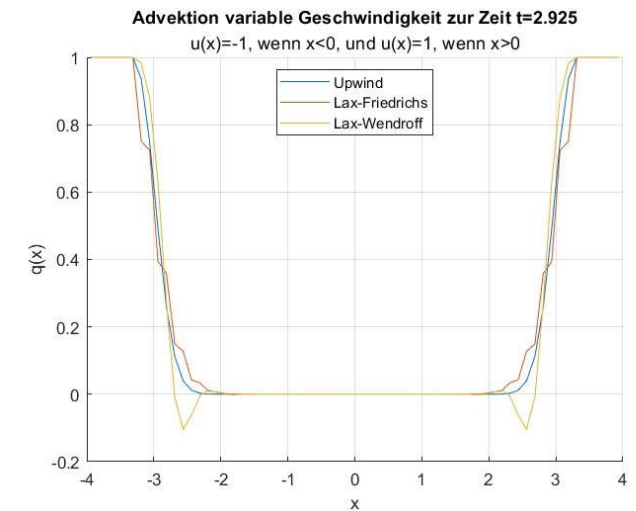
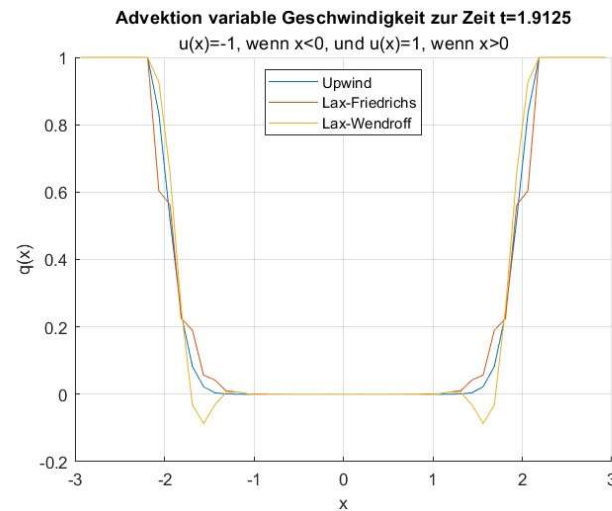
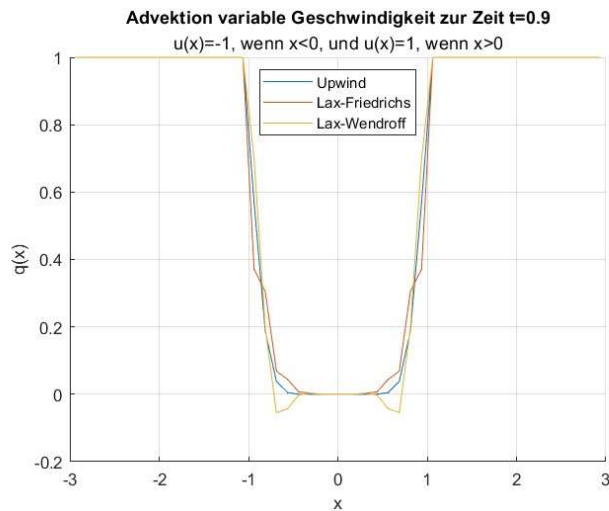
$$\|q_i - q_{ex}\| = \Delta x \sum_{i=1}^N |q_i - q_{ex}|.$$

| Schritt.   | Fehler Upwind | EOC Upwind | Fehler L.-F. | EOC L.-F. | Fehler L.-W. | EOC L.-W. |
|------------|---------------|------------|--------------|-----------|--------------|-----------|
| 0.5000     | 0.1309        | 0.9511     | 0.3784       | 1.1989    | 0.0616       | 1.7364    |
| 0.2500     | 0.0677        | 1.0006     | 0.1648       | 1.0617    | 0.0185       | 2.1411    |
| 0.1250     | 0.0338        | 0.9759     | 0.0790       | 1.0025    | 0.0042       | 2.0881    |
| 0.0625     | 0.0172        | 0.9884     | 0.0394       | 1.0039    | 9.8558e-04   | 2.0454    |
| 0.0313     | 0.0087        | 0.9943     | 0.0197       | 1.0027    | 2.3877e-04   | 2.0204    |
| 0.0156     | 0.0044        | 0.9997     | 0.0098       | 1.0034    | 5.8855e-05   | 2.0115    |
| 0.0078     | 0.0022        | 0.9999     | 0.0049       | 1.0017    | 1.4597e-05   | 2.0057    |
| 0.0039     | 0.0011        | 0.9999     | 0.0024       | 1.0009    | 3.6347e-06   | 2.0028    |
| 0.0020     | 5.4419e-04    | 0.9996     | 0.0012       | 1.0002    | 9.0687e-07   | 2.0011    |
| 9.7656e-04 | 2.7216e-04    | NaN        | 6.1049e-04   | NaN       | 2.2654e-07   | NaN       |



# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

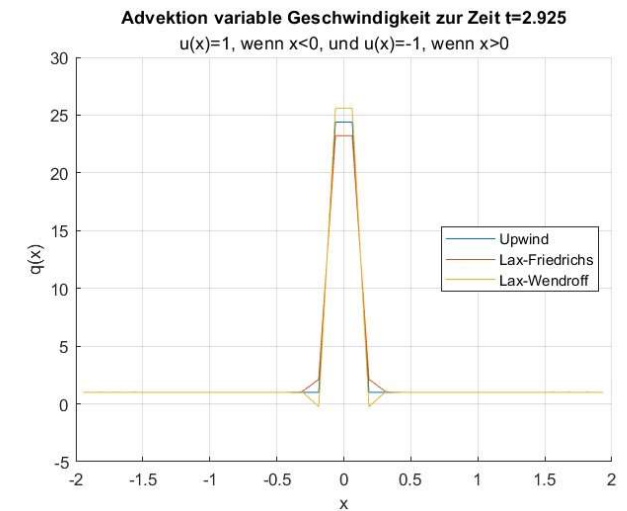
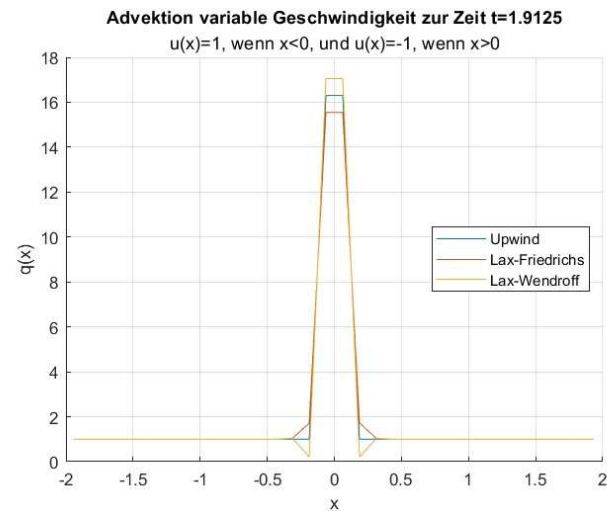
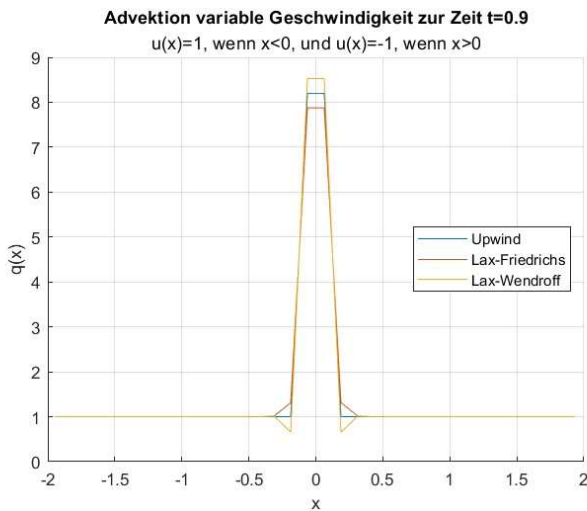
## 4.4. Numerische Resultate: Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten Bsp. 1





# 4. Numerische Resultate: Finite-Volumen-Methoden

## 4.5. Numerische Resultate: Advektionsgleichung mit variablen Koeffizienten Bsp. 2



# 5. Zusammenfassung und Ausblick

---

## 5.1. Zusammenfassung

- Lax-Friedrichs Methode und Upwind Methode haben Konvergenzordnung eins.
- Lax-Wendroff Methode hat Konvergenzordnung zwei.
- Für unstetige Lösungen gelten diese Konvergenzordnungen nicht. Die Konvergenzordnung ist in dem Fall  $\frac{1}{2}$ .

## 5.2. Ausblick

- Wie kann die Finite-Volumen-Methode für mehrdimensionale Erhaltungssätze genutzt werden?
- Gibt es weitere Finite-Volumen-Methoden mit anderen Flussfunktionen?
- Ein Beispiel wäre die Godunov Methode. Wie sieht deren Flussfunktion und Konvergenzordnung aus?

# 6. Quellenangaben

---

1. LeVeque, Randall J.: Finite volume methods for hyperbolic problems: Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
2. Lukáčová-Medvidová, Mária: Numerical modelling in computational fluid dynamics, 2002, <https://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/files/2015/11/Lecture-Notes-Computational-Fluid-Dynamics.pdf> (abgerufen am 20.09.2022).
3. LeVeque, Randall J.: Numerical Methods for Conservation Laws: Basel: Birkhäuser, 1999.
4. Kostrykin, Vadim: Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen, 2019, <https://www.funktionalanalysis.mathematik.uni-mainz.de/files/2019/11/pdgl1-2019-2.pdf> (abgerufen am 24.10.2022).

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!  
Haben Sie weitere Fragen?

