Modellierung II

Hanna Goebel

Hauptseminar Mathematische Modellierung - WS25/26

Prof. Dr. Mária Lukácová

Gliederung

- Infos über Pocken
- Halleys Sterbetafel
- Bernoullis Modell zur Populationsentwicklung
- Das SIR-Modell
- Epidemieeindämmung

Die Pocken

- Inkubationszeit: 12-14 Tage
- Symptome: Fieber, Schüttelfrost, Blasenbildung
- Letalität: 10%-90%, durchschnittlich 30%
- Mögliche Folgen: Vernarbung, Erblindung, Gehörlosigkeit, Lungenentzündungen oder Hirnschäden
- Genesung bedeutet lebenslange Immunität

Impfungen

- Seit 3000 Jahren Variolation in China
- Impfung durch Infektion mit abgeschwächter Form der Erreger
- In Europa durch Lady Mary Wortley Montagu verbreitet
- Kuhpocken schützen vor echten Pocken (Beleg 1765)
- 1796 Impferfolg mit Vaccina-Viren (Edward Jenner)
- Pocken seit 1979 vollständig ausgerottet

Daniel Bernoulli und die Pocken

- Impfrisiken für Individuen subjektiv
- Für Gesamtbevölkerung kann man statistische Aussagen treffen
- Bernoulli will Impfrisiken gegen Pockentode aufwägen
- 1760 Lesung vor Academie Royale des Sciences de Paris

> Bernoullis Grundfrage (1760): Kann trotz Impfrisiko die Lebenserwartung einer Population durch die Pockenimpfung erhöht werden?

Halleys Sterbetafel

- Halley betrachtet Population in Breslau 1693
- 1000 Einjährige
- Lebende nach n Jahren
- Durchschnittliche Lebenserwartung ca 26 Jahre

Age. Curt.	Persons.	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age Curt	Persons.	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons	Age Curt	Persons	Age. Curt.	Persons	Age. Curt.	Persons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Age.	Persons.
7	5547
14	4584
21	4270
28	3964
35	3604
42	3178
49	2709
56	2194
63	1694
70	1204
77	692
84	253
100	107
	34000
	Sum Total.

Bernoullis Modell

- Bernoulli will mit Halleys Daten Modell einer Population erstellen
- Population: gleichaltrige Individuen ab der Geburt betrachtet
- Zeiteinheit ist das Jahr
- Überstandene Krankheit führt zu lebenslanger Immunität

Bernoullis Modell

$\xi(t)$ = Anzahl Überlebende in der Population zur Zeit t

$s(t)$ = Anzahl ansteckbare Individuen in der Population zur Zeit t

$1/n$ = Wahrscheinlichkeit, in einer Zeiteinheit (Jahr) mit Pocken infiziert zu werden

$1/m$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Infizierter an Pocken stirbt

$1/N$ = Wahrscheinlichkeit, an der Impfung zu sterben

Bernoullis Rechnung

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) =: \Delta\xi = -\text{Anzahl Todesfälle im Zeitintervall } [t, t+\Delta t]$$

$$\frac{s(t)\cdot\Delta t}{n} = \text{ Anzahl im Zeitintervall } [t, t+\Delta t] \text{ neu Angesteckte} \quad (1.9)$$

$$\frac{s(t)\cdot\Delta t}{n} = \text{Anzahl im Zeitintervall } [t, t+\Delta t] \text{ neu Angesteckte.} \tag{1.9}$$

① vereinfachende Annahme:

Pockeninfektion

überlebt

stirbt instantan

② $\frac{1}{m}$ der in $[t, t+\Delta t]$ Angesteckten sterben

$$\frac{s(t)\cdot\Delta t}{n}\frac{1}{m} = \text{Anzahl Pockentote, die im Zeitintervall } [t, t+\Delta t] \text{ angesteckt wurden.}$$

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) =: \Delta\xi = -\text{Anzahl Todesfälle im Zeitintervall } [t, t+\Delta t]$$

$$\frac{s(t)\cdot\Delta t}{n}\frac{1}{m} = \text{Anzahl Pockentote, die im Zeitintervall } [t, t+\Delta t] \text{ angesteckt wurden.}$$

$$-\Delta\xi - \frac{s(t)\Delta t}{mn} = \text{Anzahl Tote aus } \textbf{anderen} \text{ Gründen (als Pocken) im Zeitintervall } [t, t+\Delta t]. \tag{1.10}$$

$$\frac{s(t)}{\xi(t)}\left(-\Delta\xi - \frac{s(t)\Delta t}{mn}\right) = \text{Anzahl der Ansteckbaren, die in } [t, t+\Delta t] \text{ aus } \textbf{anderen} \text{ Gründen sterben} \tag{1.11}$$

$$s(t+\Delta t) - s(t) =: \Delta s = -\begin{pmatrix}\text{Abnahme der Anzahl ansteckbarer} \\ \text{Personen im Zeitintervall } [t, t+\Delta t]\end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; \begin{matrix}(1.9) \\ (1.11)\end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gründe: } \cdot \text{ Pockeninfektion} \\ \qquad\quad\;\; \cdot \text{ Todesfälle aus anderen Gründen}\end{array}}$$

$$-\Delta s = \frac{s(t)\Delta t}{n} - \frac{s(t)}{\xi(t)}\left(\Delta\xi + \frac{s(t)\Delta t}{mn}\right) \quad \Big| : \Delta t$$

$$\frac{-\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t)}{n} - \frac{s(t)}{\xi(t)}\frac{\Delta\xi}{\Delta t} - \frac{s^2(t)}{\xi(t)mn} \quad \Big| \Delta t \to 0$$

$$-s'(t) = \frac{s(t)}{n} - \frac{s(t)\xi'(t)}{\xi(t)} - \frac{s^2(t)}{\xi(t)\cdot mn}.$$

$$-s'(t) = \frac{s(t)}{n} - \frac{s(t)\xi'(t)}{\xi(t)} - \frac{s^2(t)}{\xi(t)\cdot mn}. \quad \Big| \cdot \frac{\xi(t)}{s^2(t)}$$

$$-\frac{s'(t)\xi(t)}{s^2(t)} = \frac{\xi(t)}{ns(t)} - \frac{\xi'(t)}{s(t)} - \frac{1}{mn}$$

$$\left(\frac{\xi(t)}{s(t)}\right)' = \frac{s(t)\xi'(t) - s'(t)\xi(t)}{s^2(t)} = \frac{\xi(t)}{ns(t)} - \frac{1}{mn}$$

$$q(t) := \frac{\xi(t)}{s(t)}$$

$$q'(t) = \frac{q(t)}{n} - \frac{1}{mn} \qquad (1.12)$$

$$q'(t) = \frac{q(t)}{n} - \frac{1}{mn}$$

stationäre Lösung: $$q_\infty \equiv \frac{1}{m}$$

allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $$q(t) = q_\infty + q_{\text{hom}}(t) = \frac{1}{m} + C\,\mathrm{e}^{t/n}$$

C aus der Anfangsbedingung bestimmen: $$q(0) = \frac{\xi(0)}{s(0)} = 1$$

$$\frac{\xi(t)}{s(t)} = q(t) = \frac{1}{m}\Big((m-1)\,\mathrm{e}^{t/n} + 1\Big) \qquad (1.13)$$

$$s(t) = \xi(t) \cdot \frac{m}{(m-1)e^{t/n} + 1} \qquad (1.14)$$

Auswirkungen von Impfungen

$-\Delta\xi - \frac{s(t)\Delta t}{mn} =$ Anzahl Todesfälle aus **anderen** Gründen (als Pocken) im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$. $\quad \Big| : \Delta t$

$$-\frac{\Delta\xi}{\Delta t} - \frac{s(t)}{mn} \qquad \Big| \Delta t \to 0$$

$$-\xi'(t) - \frac{s(t)}{mn} \qquad \Big| : \xi(t)$$

$$\mu(t) := -\frac{1}{\xi(t)}\left(\xi'(t) + \frac{s(t)}{mn}\right) = \text{Todesrate aus anderen Gründen pro Person.}$$

Vergleichspopulation :

$z(t)$ = Anzahl einer Population, die keine Pocken kennt, zur Zeit t

Die Todesrate in dieser Population pro Person ist also gerade unser $\mu(t)$

$$z'(t) = -\mu(t)z(t) = \frac{1}{\xi(t)}\left(\xi'(t) + \frac{s(t)}{mn}\right) \cdot z(t) \qquad \Big| : z(t)$$

$$(\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} + \frac{s(t)}{\xi(t)mn} = (\ln \xi(t))' + \frac{s(t)}{\xi(t)mn}. \qquad (1.15)$$

$$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

$$(\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} + \frac{s(t)}{\xi(t)mn} = (\ln \xi(t))' + \frac{s(t)}{\xi(t)mn} \quad \Big| - (\ln \xi(t))'$$

$$((\ln z(t))' - (\ln \xi(t))' = \qquad \frac{s(t)}{\xi(t)mn}$$

$$= ((\ln z(t) - \ln \xi(t))'$$

$$= \left(\ln \frac{z(t)}{\xi(t)}\right)' = \frac{s(t)}{\xi(t)mn} \overset{q(t)=\xi(t)/s(t)}{=} \frac{1/n}{m\ q(t)}$$

$$\overset{(1.13)}{=} \frac{1/n}{(m-1)\,\mathrm{e}^{t/n}+1} = \left(\ln \frac{\mathrm{e}^{t/n}}{(m-1)\,\mathrm{e}^{t/n}+1}\right)'$$

$$\int \frac{\frac{1}{n}}{(m-1)e^{t/n}+1}\,dt = \int \frac{\frac{1}{n}}{u}\,\frac{n}{(m-1)e^{t/n}}\,du = \int \frac{\frac{1}{n}}{u}\,\frac{n}{u-1}\,du = \int \frac{1}{u(u-1)}\,du = \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\,du$$

Substitution

$$u = (m-1)e^{t/n} + 1$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{n}(m-1)e^{t/n}$$

$$\frac{n}{(m-1)e^{t/n}}\,du = dt$$

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u}$

$1 = Au + B(u-1) \Rightarrow 1 = u(A+B) - 1\cdot B$

$\Rightarrow A+B=0$ und $B=-1 \Rightarrow A=1$

Resubstitution

Logarithmengesetze

$C_1 = \ln(C_2)$

$$= \ln|u-1| - \ln|u| + C = \ln\left((m-1)e^{t/n}\right) - \ln\left((m-1)e^{t/n}+1\right) + C = \ln\left(\frac{(m-1)e^{t/n}}{(m-1)e^{t/n}+1}\right) + C_1 = \ln\left(C_2\,\frac{(m-1)e^{t/n}}{(m-1)e^{t/n}+1}\right) = \ln\left(C\,\frac{e^{t/n}}{(m-1)e^{t/n}+1}\right)$$

$$\left(\ln \frac{z(t)}{\xi(t)}\right)' = \left(\ln \frac{e^{t/n}}{(m-1)\,e^{t/n}+1}\right)'$$

$$\downarrow$$

$$\ln \frac{z(t)}{\xi(t)} = \ln\left(C \cdot \frac{e^{t/n}}{(m-1)\,e^{t/n}+1}\right) \qquad (1.16)$$

Konstante C bestimmen :
$\xi(0) = z(0)$
$\ln 1 = \ln\left(C \cdot \dfrac{1}{m}\right)$
also $C = m$

$$z(t) = \xi(t) \cdot \frac{m\,e^{t/n}}{(m-1)\,e^{t/n}+1} \qquad (1.17)$$

Bernoullis Folgerung

mittlere Lebenserwartung der realen Population mit der mittleren Lebenserwartung in der pockenfreien (geimpften) Population vergleichen

$$
\begin{aligned}
Z(t) &:= \overbrace{\left(1 - \frac{1}{N}\right) z(t)}^{\text{Tode infolge Impfkomplikationen}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \xi(t) \frac{m\,\mathrm{e}^{t/n}}{(m-1)\,\mathrm{e}^{t/n} + 1} \qquad (1.18) \\
&= \left(\begin{array}{l}\text{Größe einer Population zur Zeit } t\text{, die sy-} \\ \text{stematisch bei der Geburt geimpft wurde}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

mittlere Lebenserwartung ohne Impfung:

$$\frac{1}{\xi(0)} \cdot (\xi(1) + \xi(2) + \xi(3) + \ldots) \approx 26 \text{ Jahre und } 2 \text{ Monate.} \tag{1.19}$$

Mithilfe der Formel aus (1.18) und den Werten $m = n = 8$ und $N = 200$, sowie erneut mit den Werten von Halley, bestimmte er ebenso die **mittlere Lebenserwartung mit Impfung**:

$$\frac{1}{Z(0)} \cdot (Z(1) + Z(2) + Z(3) + \ldots) \approx 29 \text{ Jahre und } 7 \text{ Monate.}$$

Bernoullis Fazit

- Erhöhung der Lebenserwartung von über 10%
- Bernoulli empfiehlt Pockenimpfung
- Jean-Baptiste d'Alembert widerspricht ihm

Das SIR-Modell

Modellannahmen:

- Die Krankheit ist von begrenzter Dauer.
- Jeder Kranke wird wieder gesund.
- Die überstandene Krankheit führt zur lebenslangen Immunität.
- Die Population ist isoliert (keine Zu- oder Abwanderung, keine Todesfälle)

drei Gruppen :

$S(t)$ = Anzahl Ansteckbare zur Zeit t (susceptible)
$I(t)$ = Anzahl Infizierte zur Zeit t (infected)
$R(t)$ = Anzahl Geheilte zur Zeit t (recovered)

Ansteckung

Annahmen:

- Trifft eine kranke Person eine ansteckbare, wird letztere mit Wahrscheinlichkeit p infiziert.
- Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Treffens im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ist proportional (mit Proportionalitätsfaktor q) zu $S(t)$, $I(t)$ und Δt.

$$\Delta S := S(t + \Delta t) - S(t)$$

$$\Delta S = -p\,q \cdot S(t)\,I(t)\,\Delta t \quad \Big|: \Delta t\,,\ \Delta t \to 0$$

$$S'(t) = -p\,q \cdot S(t)\,I(t) \underset{c := pq}{=} -c \cdot S(t)\,I(t) \qquad (1.20)$$

Heilung

Annahme:

- Die Krankheit dauert im Schnitt n Tage. Greift man zufällig einen Kranken heraus, ist dieser mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ im i-ten Tag seiner Krankheit ($i = 1, 2, \ldots, n$).

$\downarrow$

jeden Tag werden im Schnitt $1/n$ der Kranken wieder gesund

Im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ werden im Schnitt ΔR Kranke wieder gesund mit

$$\Delta R = R(t + \Delta t) - R(t) = \frac{1}{n} I(t)\ \Delta t$$

$$\Delta R = R(t+\Delta t) - R(t) = \frac{1}{n} I(t)\,\Delta t \quad \Big| : \Delta t,\ \Delta t \to 0$$

$$R'(t) = \frac{1}{n} I(t)$$

$w := 1/n$

$$R'(t) = w\,I(t) \qquad (1.21)$$

$S(t)+I(t)+R(t)$ konstant
Ableitung gleich 0
(1.20) und (1.21)

$$I'(t) = -S'(t) - R'(t) = \underbrace{cS(t)I(t)}_{\text{neu Infizierte}} - \underbrace{w\,I(t)}_{\text{Geheilte}} \qquad (1.22)$$

Zusammen bilden die Gleichungen (1.20), (1.21) und (1.22) das **SIR-Modell**. Wir schreiben dieses nochmals kurz und kompakt auf:

Das **SIR-Modell** ist durch das folgende nichtlineare System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$
\begin{aligned}
S' &= -cSI && (1.23)\\
I' &= cSI - wI && (1.24)\\
R' &= \phantom{-cSI - {}} wI && (1.25)
\end{aligned}
$$

Zu den DGLs

Lokale Existenz und Eindeutigkeit

Schreibe $y = (S, I, R)^T \in \mathbb{R}^3$. Das gegebene System
$$\begin{cases} S' = -cSI \\ I' = cSI - wI \\ R' = wI \end{cases}$$
ist äquivalent zu $y'(t) = f(y(t))$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(S, I, R) = \begin{pmatrix} -cSI \\ cSI - wI \\ wI \end{pmatrix}$.

Da die Komponenten von f Polynome in (S, I, R) sind, existieren alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung und sind stetig, also $f \in C^\infty$. Nach Satz 12.2 (Analysis 2 - Otto Forster) ist f also lokal Lipschitz in y.
Nach Satz 12.4 (Picard-Lindelöf) existiert also für jeden Anfangswert $y(a) = (S(a), I(a), R(a)) =: y_a \in \mathbb{R}^3$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $y : [a, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^3$ der DGL mit $y(a) = y_a$. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 12.3.

Nichtnegativität bei nichtnegativen Anfangsdaten

Gelte zum Startzeitpunkt a $I(a)=0$ bzw. $S(a)=0$.

Man bemerkt:

$S(a)=0 \Rightarrow S'(a)=0 \Rightarrow S(t)=S(a)=0 \quad \forall t\in[a,a+\varepsilon]$

$I(a)=0 \Rightarrow I'(a)=0 \Rightarrow I(t)=I(a)=0 \quad \forall t\in[a,a+\varepsilon]$

Man betrachte also den spannendsten Fall: $S(a)>0$, $I(a)>0$, $R(a)\geq 0$

Angenommen, es existiert ein $t\in(a,a+\varepsilon]$ mit $S(t')=0$. Dann gilt $(S(t'),I(t'),R(t'))=(0,I(t'),R(t'))$.

Dann müsste also die Lösung (S,I,R) nach Satz 12.3 Otto Form mit der Lösung (S^*,I^*,R^*) des Problems mit Anfangsdaten $(S^*(a),I^*(a),R^*(a))=(0,I(t')\cdot e^{\omega t'},R(t')-I(t')(e^{\omega t'}-1))$ übereinstimmen, da sie zur Zeit t' übereinstimmen. Aber $S(a)>0=S^*(a)$.

Analog kann man den Fall $I(a)>0$ und $I(t')=0$ betrachten und stößt dort auf den gleichen Widerspruch, dass $I(a)>0=I^*(a)$ gilt.

Also bleiben S und I für echt positive Anfangsdaten echt positiv. Da $R'=\omega I$, folgt aus der Positivität von I $R'>0$, wenn $I(a)>0$ ist, also $R(t)>0$ für alle $t\in(a,a+\varepsilon]$.

Zur globalen Existenz:

Auf unserem Intervall $[a, a+\varepsilon]$ wissen wir, dass $S, I, R \geq 0$ (für nichtnegative Anfangswerte) sind und $S+I+R$ konstant ist ($S'+I'+R'=0$). Also $0 \leq S(t), I(t), R(t) \leq N$. Damit ist die gesamte Trajektorie in diesem Schritt in der kompakten Menge: $K := \{(S,I,R) \in \mathbb{R}^3 : S,I,R \geq 0,\ S+I+R = N\}$. Man weiß also aus dem lokalen Existenzbeweis, dass für jeden Anfangspunkt in K eine Zeitspanne von mindestens $\delta > 0$ existiert, auf der die Lösung von existiert und in K bleibt (wir haben ja eine einheitliche Untergrenze für Existenzzeiten). Daher kann man die Lösung bei $a+\varepsilon$ zumindest bis $a+\varepsilon+\delta$ fortsetzen. Da sie auch dort in K verläuft, gelten wieder dieselben Voraussetzungen und man kann erneut um δ verlängern. Durch Iteration erhält man die globale Existenz einer Lösung.

Beispiel: Universität

$N = 1000$ Studierenden einer Universität

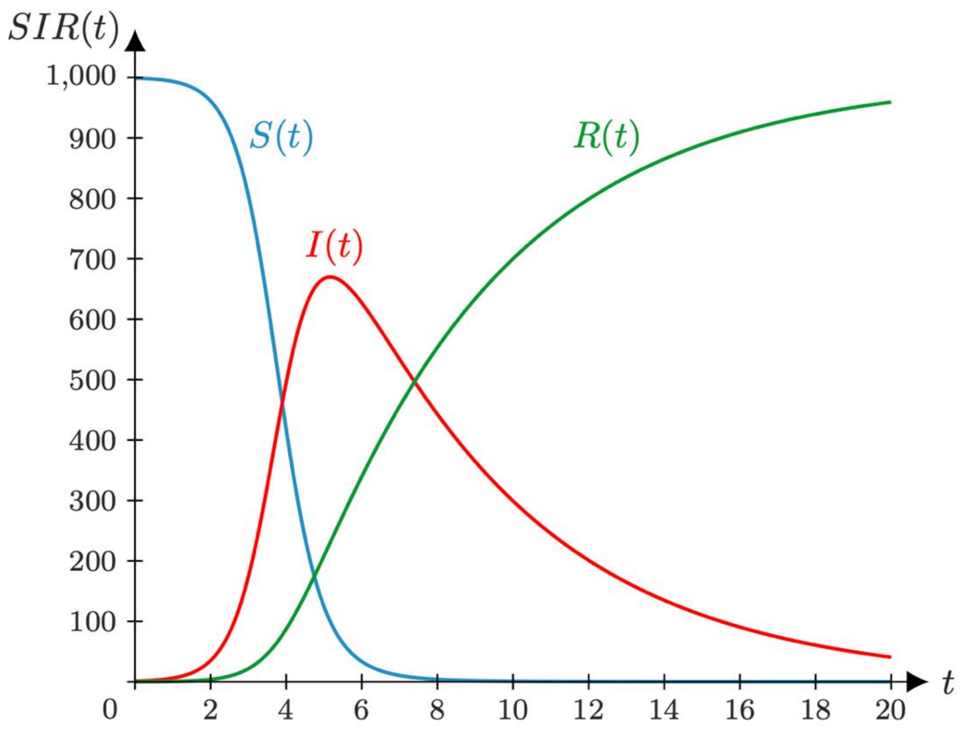
eine Person schleppt eine Krankheit ein

Zeiteinheit : Tag

$c = 0.002$
$n = 5$
also $w = 0.2$

$S(0) = 999,$
$I(0) = 1,$
$R(0) = 0.$

numerische Lösung :



Monotonie

- Solange I > 0 und S > 0 gilt S‘(t) < 0

$$S' = -cSI$$

- S(t) ist also streng monoton fallend
- Analog dazu ist R(t) streng monoton steigend

Höhepunkt der Epidemie

Höhepunkt der Krankheit: Zeitpunkt $t_{\max}$

$$I(t_{\max}) \text{ maximal} \longrightarrow I'(t_{\max}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$S(t_{\max}) = \frac{w}{c}$$

wenn S diesen Wert hat, ist die Anzahl Infizierter I maximal

Invariante

- Gleichungen (1.23) und (1.24) enthalten nur S und I
- (1.25) ist entkoppelt
- Summe S(t) + I(t) + R(t) ist konstant (also eine Invariante)

$$\downarrow$$

$$R(t) = S(0) + I(0) + R(0) - (S(t) + I(t))$$

Zustandsraum

parametrisierten Kurven:

$$t \mapsto \big(S(t), I(t)\big) \qquad (1.26)$$

Ableitung der Funktion $I(S)$ mithilfe von (1.23) und (1.24):

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt} = \frac{cSI - wI}{-cSI} = \frac{w}{cS} - 1 \qquad (1.27)$$

Stammfunktion :

$$I(S) = \frac{w}{c} \ln S - S + k$$

Herleitung der parametrisierten Kurve

Da wir aus der Nichtnegativität von S, I, R wissen, dass $S'(t) = -cS(t)I(t) < 0$ ist, hat S eine Umkehrfunktion S^{-1}. Diese ist C^1, da $S'(t) \neq 0$ für alle t. Für die Verknüpfung $I \circ S^{-1}$ gilt $(I \circ S^{-1})(s) = I(t)$ genau dann, wenn $s = S(t)$ und sie hat die Ableitung $\frac{d}{ds}((I \circ S^{-1})(s)) = I'(t) \cdot \frac{d}{ds} S^{-1}(s)$. Aber $(S^{-1})'(s)$ ist gerade $1/S'(t)$, also ist $(I \circ S^{-1})'(s) = \frac{I'(t)}{S'(t)}$.

Mit Einsetzen der DGLs erhält man $(I \circ S^{-1})'(s) = -\frac{cS(t)I(t) - \omega I(t)}{cS(t)I(t)} = -\left(1 - \frac{\omega}{cS(t)}\right) = \frac{\omega}{cS(t)} - 1 \overset{s = S(t)}{=} \frac{\omega}{cs} - 1$.

Integriert man diese Funktion, so erhält man $(I \circ S^{-1})(s) = \int \left(\frac{\omega}{cs} - 1\right) ds = \frac{\omega}{c} \ln(s) - s + k$ mit Konstante $k \in \mathbb{R}$.

Mit $s = S(t)$ führt man eine Rücksubstitution auf die Zeitparameterdarstellung durch, also $I(t) = (I \circ S^{-1})(S(t)) = \frac{\omega}{c} \ln(S(t)) - S(t) + k$.

Die Integrationskonstante k wird durch die Anfangsbedingung $t = a$ bestimmt. So erhält man $I(a) = \frac{\omega}{c} \ln(S(a)) - S(a) + k$, also $k = I(a) - \frac{\omega}{c} \ln(S(a)) + S(a)$.

Das qualitative Verhalten

Für $t = 0$ erhalten wir aus (1.27)

$$\frac{dI}{dS}(0) = \frac{w}{cS(0)} - 1$$

- Ist S(0) > w/c, wird I größer, bis S(t) = w/c. Dann fällt I(t) monoton gegen 0. S(t) fällt gegen einen Grenzwert größer 0
- Ist S(0) < w/c, fällt I monoton gegen 0 und S gegen einen Grenzwert > 0

Was uns das qualitative Verhalten verrät

- w/c soll zur Eindämmung einer Krankheit groß gehalten werden, damit S kleiner als w/c ist, um einen Abfall von I zu erreichen
- durch Impfungen wird S verkleinert
- Durch Quarantäne, Masken und andere Maßnahmen wird c verkleinert, also w/c vergrößert

Verlauf einer Epidemie mit Maßnahmen

$c' = 0.001$

$n' = 2$

$w' = 0.5$

$w/c = 100 < 500 = w'/c'$