MODELLIERUNG I

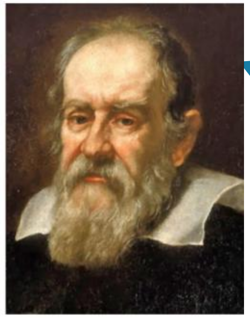
Carina Prien

Hauptseminar Mathematische Modellierung –WS 2025/26

Prof. Dr. Mária Lukácová

GLIEDERUNG

- Beziehung zwischen Mathematik und life sciences
- Was ist ein Modell und wie erstellt man es?
- Theorien
- Zusammenhang zwischen Realität und Modell
- Warum braucht man Modelle?
- Systemanalyse
- Phosphatkonzentration im See
- Beispiele von Modellen
- Algenwachstum und Nitratkonzentration
- Lineare Modelle mit einer Systemvariable am Beispiel See
- Stoffaustausch an Grenzflächen
- Mehrdimensionale Modelle

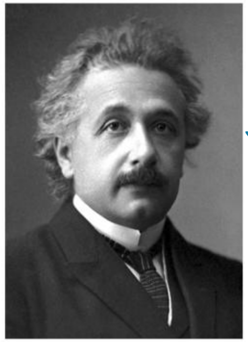


Galileo Galilei, 1623

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben und ihre Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, ohne die es ganz unmöglich ist, auch nur einen Satz zu verstehen, ohne die man sich in einem dunklen Labyrinth verliert.“

Eugene Wigner, 1960

“The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning .”

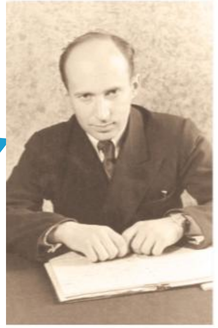


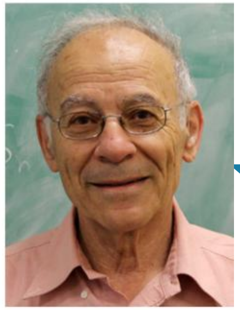
Albert Einstein, 1921

„Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt? [...] Hierauf ist nach meiner Ansicht kurz zu antworten: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

Israel Gelfand, 1966

“Eugene Wigner wrote a famous essay on the unreasonable effectiveness of mathematics in natural sciences. He meant physics, of course. There is only one thing which is more unreasonable than the unreasonable effectiveness of mathematics in physics, and this is the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology.”





Avner Friedman, 2010

“The gulf between biology and mathematics is narrowing as each domain tackles the language, concepts, and methods of the other.”

WAS IST EIN MODELL?

Reduktionistischer Ansatz

- Modelle beschränken sich auf einen engen Ausschnitt der Realität
- Bsp.: Räuber-Beute Population
- Kritik: es können wichtige Zusammenhänge außer Acht gelassen werden, die eigentlich wichtig sind

Holistischer Ansatz (ganzheitlich)

- Synthese von mehreren Modellen

➢ Jedes Modell ist eine **vereinfachte Beschreibung der Realität**
➢ Die meisten Phänomene kann man auf mehrere Arten darstellen!

WIE ERSTELLT MAN EIN MODELL?

SCHRITT 0

Welche konkrete Frage soll mit dem Modell beantwortet werden?

(z.B. Prognose über Langzeitverhalten, Prozessoptimierung)

→ Welche Daten werden gesammelt und welche Parameter sind relevant

Welchen <u>Ausschnitt der Realität</u> will man modellieren?

➔ Festlegen von Systemgrenzen

Welche Parameter kann man bei der Betrachtung außenvorlassen?

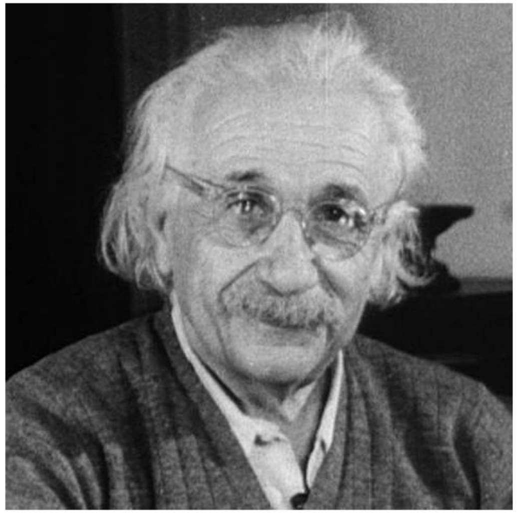
Welche mathematischen Strukturen würden sich eignen, um das Phänomen zu beschreiben?

(z.B. gewöhnliche oder partielle DGLs, stochastische Methoden, LAG, Geometrie)

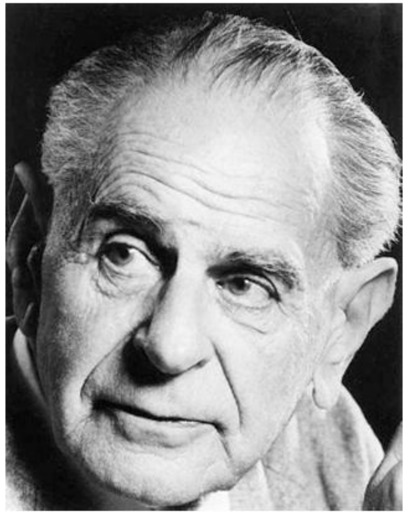
WIE ERSTELLT MAN EIN MODELL?

1. Beobachten
2. Messungen (Daten sammeln)
3. Suche nach mathematischen Mustern (Daten ordnen)
4. Erstellen des mathematischen Modells (Daten verstehen)
5. Vergleich mit der Realität (Validieren, Falsifizieren)
6. Modell anpassen, Verfeinern oder Theorie verallgemeinern

THEORIEN



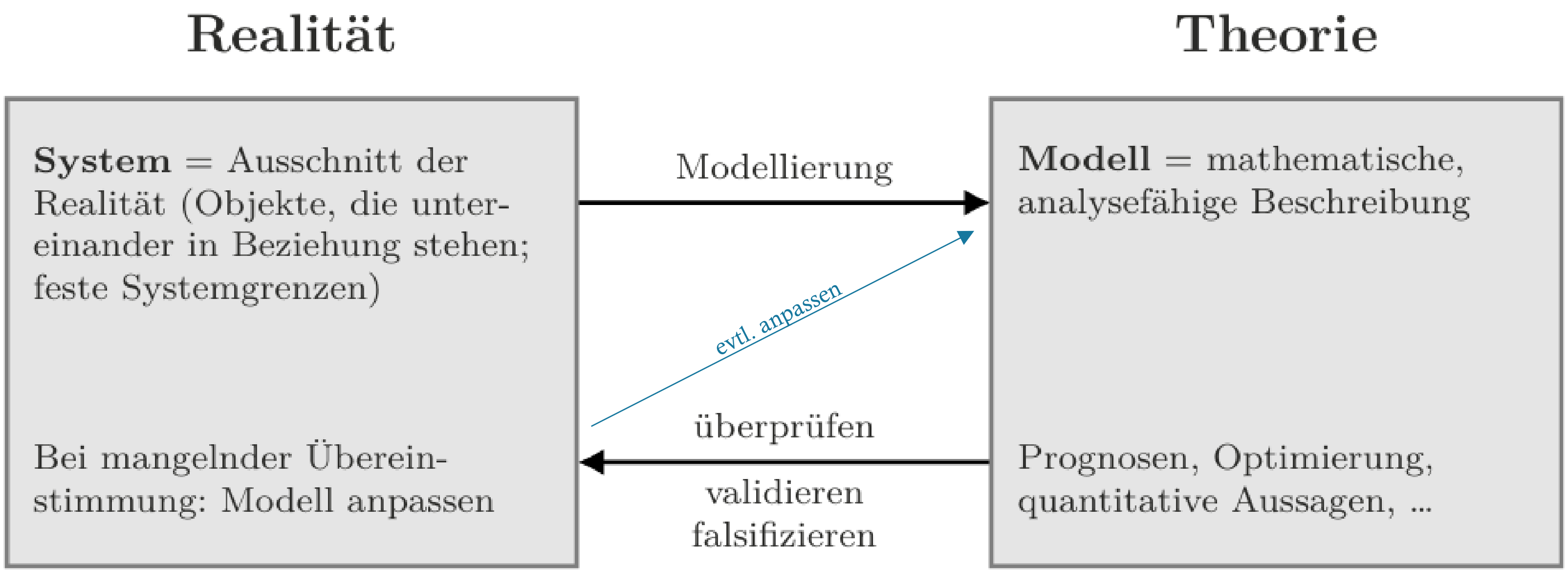
„Neue Theorien entstehen zum einen, wenn neue Fakten nicht mit bestehenden Theorien erklärt werden können, zum anderen durch das Streben nach Vereinheitlichung und Vereinfachung zu einer Theorie als Ganzem.“
- Albert Einstein



Theorien können nie als Ganzes verifiziert werden, sondern nur falsifiziert.
- Karl Popper

- ➢ Anpassung von Theorien bedingt durch neue Beobachtungen der Realität ist notwendig

ZUSAMMENHANG REALITÄT UND MODELL



- Realität $\neq$ Modell
- Mathematische Analyse liefert **innerhalb** der Theorie korrekte Resultate (muss aber nicht der Realität entsprechen)
- Bei zu komplexen Analysen kann man auf numerische Simulationen zurückgreifen

→ Realität $\neq$ mathematisches Modell $\neq$ numerisches Modell

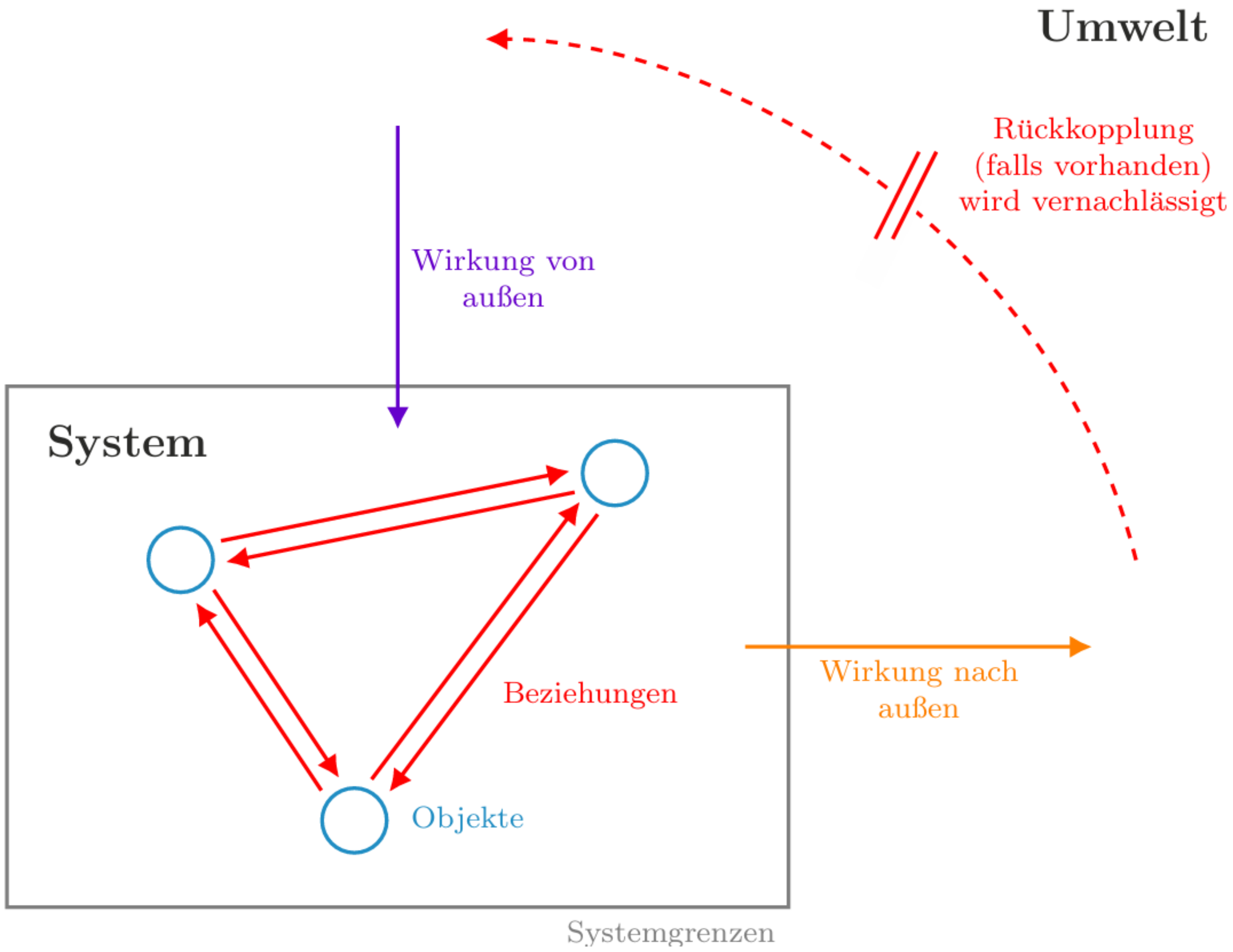
WARUM BRAUCHT MAN MODELLE?

- Besseres Verständnis der Realität
- Optimierung von Prozessen
- Numerische Simulationen durchführen
- Virtuelle Experimente
- Zukunftsprognosen erstellen

1. BEOBACHTEN - SYSTEMANALYSE

Def.: (System)

Ein System ist eine gedankliche Konstruktion, die einen durch festgelegte **Grenzen** definierten Teil der Umwelt abbildet und dabei die **Objekte** und deren **Beziehungen** identifiziert.



1. BEOBACHTEN - SYSTEMANALYSE

Def.: (System)

Ein System ist eine gedankliche Konstruktion, die einen durch festgelegte **Grenzen** definierten Teil der Umwelt abbildet und dabei die **Objekte** und deren **Beziehungen** identifiziert.

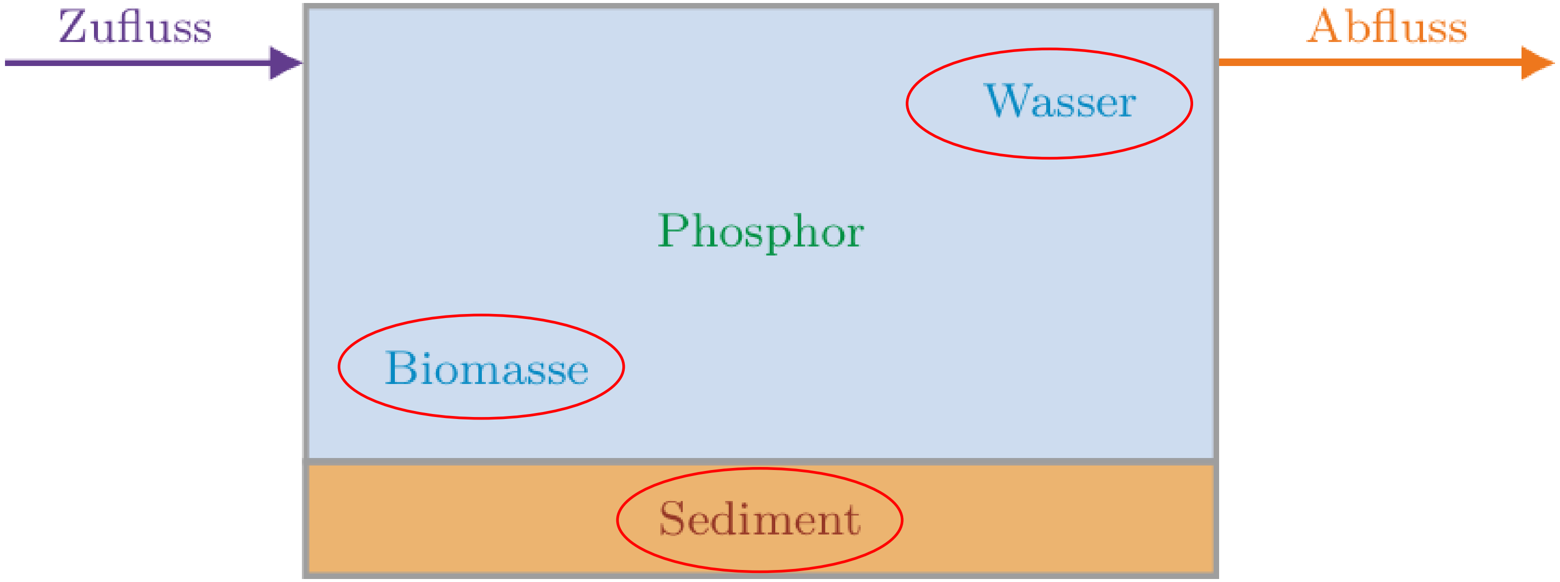
Def.: (mathematisches Modell)

Ein mathematisches Modell ist eine vereinfachte Beschreibung eines komplexen Systems mithilfe mathematischer Formeln und von **Systemvariablen**.

Die Anzahl der Systemvariablen heißt **Dimension** des Modells.

BSP. FÜR EIN SYSTEM – PHOSPHATKONZENTRATION IM SEE

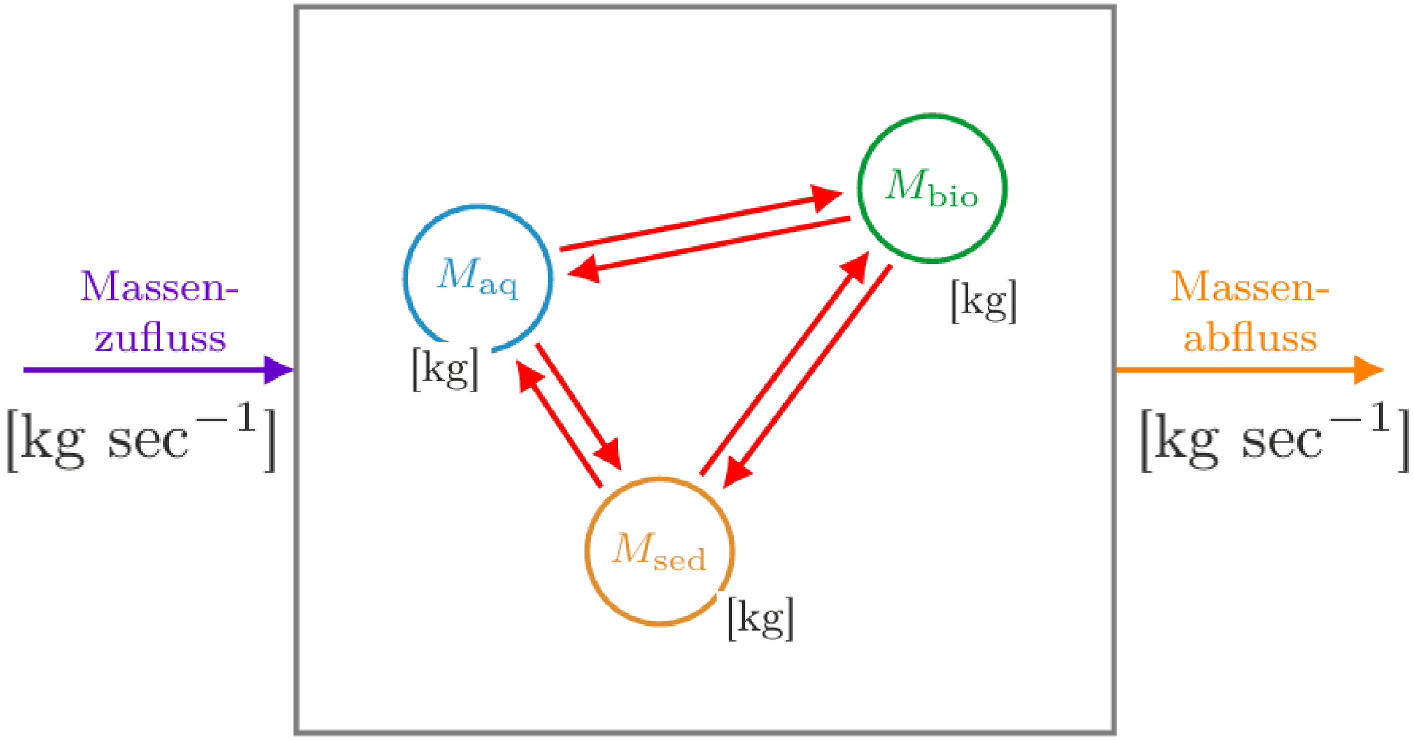
- Phosphat:
  - Unter Anderem enthalten in Düngemittel und Waschmittel
  - Fördert Algenwachstum
  - Überdüngung → erhöhter Sauerstoffverbrauch → der See „kippt um“ (Aerobe Lebewesen sterben)
- Modell, um die Phosphatkonzentration im See besser zu verstehen:



Dimension des Modells: 3

BSP. FÜR EIN SYSTEM – PHOSPHATKONZENTRATION IM SEE

- Phosphat:
  - Unter Anderem enthalten in Düngemittel und Waschmittel
  - Fördert Algenwachstum
  - Überdüngung → erhöhter Sauerstoffverbrauch → der See „kippt um“ (Aerobe Lebewesen sterben)
- Modell, um die Phosphatkonzentration im See besser zu verstehen:



Maßeinheiten sollten im Blick behalten werden!

In diesem Fall: Masseninput: Masse an Phosphor im Zufluss [kg sec^{-1}]
Massenabfluss: Masse an Phosphor im Abfluss [kg sec^{-1}]
M_{aq}: Masse an Phosphor im Wasser [kg]
M_{bio}: Masse an Phosphor in der Biomasse [kg]
M_{sed}: Masse an Phosphor im Sediment [kg]

BEISPIELE VON MODELLEN

- 1. Das Sonnensystem
  - **Heliozentrisch** (Sonne als Mittelpunkt) vs. **Geozentrisch** (Erde als Mittelpunkt)
    - Die **ersten Überlieferungen** von Theorien bezüglich des Sonnensystems stammen bereits aus dem alten Griechenland
      - ➢ Heliozentrische Theorie: 3. Jahrhundert vor Christus durch Aristarchos von Samos
      - ➢ Geozentrische Theorie: 2. Jahrhundert vor Christus durch Ptolemäus
    - ➢ Glaube an **geozentrisches Weltbild** wurde durch Epizykeltheorie bestärkt (wurde mit der Zeit allerdings immer komplizierter)
    - Anfang des 16. Jhd.: **Etablierung des heliozentrischen Weltbilds**

      Nikolas Kopernikus – Streben nach Vereinfachung der komplexen Epizykeltheorie
    - Ende des 16. Jhd.: Unterstützung des heliozentrischen Weltbilds

      Tycho Brahe – immer präzisere Messungen, die das geozentrische Bild anzweifeln

BEISPIELE VON MODELLEN

- Anfang des 17. Jhd.: „Akzeptanz“ des heliozentrischen Weltbilds

  Johannes Kepler – 3 **Keplersche Gesetze** (basierend auf Tycho Brahes Messungen):

  1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
  2. Keplersches Gesetz: Eine von der Sonne zum Planeten gezogene Strecke überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
  3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen.

- Ende des 17. Jhd.: konkretere Erklärung

  Isaac Newton – Formel für **Gravitation** → alle 3 Keplerschen Gesetze folgen daraus

- Anfang des 20. Jhd.: Erklärung für bisher ungeklärte Phänomene (z.B. Periheldrehung von Merkur)

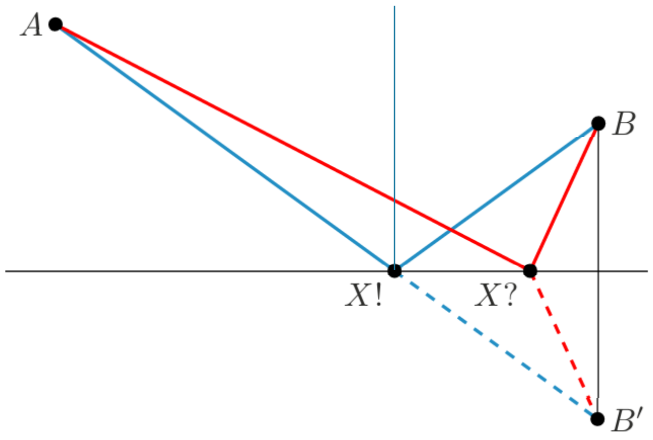
  Albert Einstein – **Relativitätstheorie**

→ selbst die besten Modelle sind nur Annäherungen an die Realität

BEISPIELE VON MODELLEN

- 2. Geometrische Optik
  - Euklid: **drei Gesetze der Lichtausbreitung** (1. gradlinige Ausbreitung 2. bei Reflexion in einem Spiegel: Einfalls- = Ausfallswinkel, 3. Bei Reflexion: einfallender, ausfallender Lichtstrahl und die Normale zur Spiegelebene liegen in einer Ebene)
  - Diese drei Gesetze folgen schon aus dem **Prinzip von Heron**:

    Licht bewegt sich immer entlang der kürzesten Bahn ➔ insb. 2. Gesetz von Euklid:
    Einfallswinkel = Ausfallswinkel



Lichtbrechung wird durch dieses Prinzip nicht erklärt!

BEISPIELE VON MODELLEN

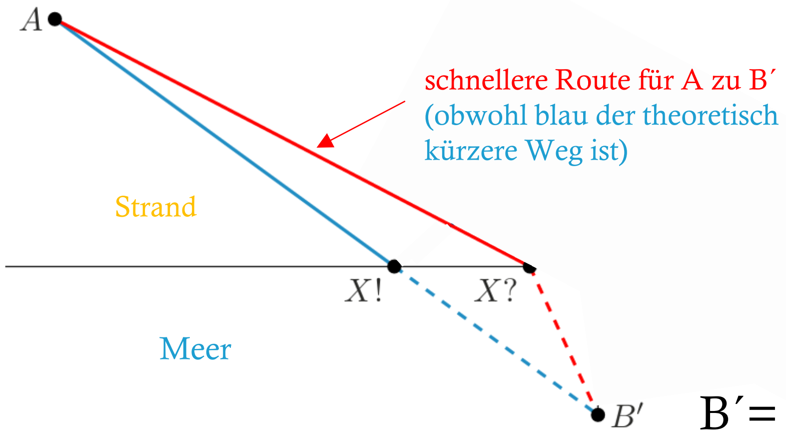
- 2. Geometrische Optik
    - **Prinzip von Fermat**:

        Licht wählt den Weg mit der kürzesten Durchlaufzeit.

        →Weg mit der kürzesten Reisezeit

Licht bewegt sich in unterschiedlichen Medien unterschiedlich schnell (in Wasser bewegt es sich z.B. langsamer als in Luft)

A= Rettungsschwimmer



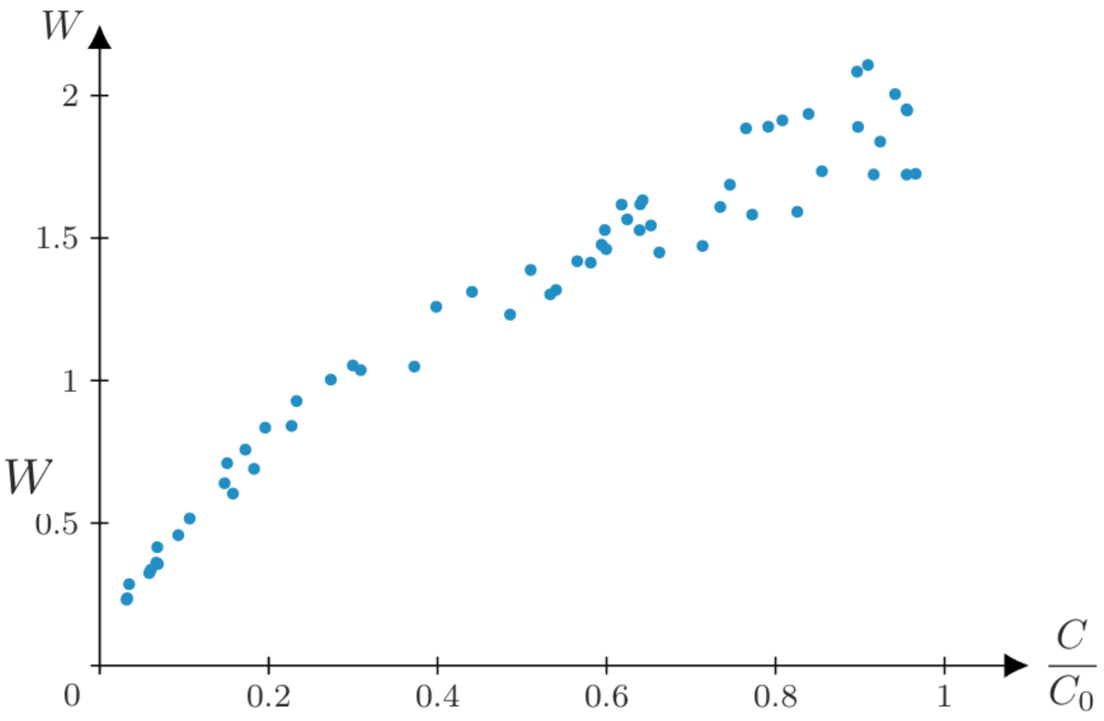
B´= zu rettende Person

Mathematische Formulierung:
(Eikonalgleichung)

$$|\nabla u| = \frac{1}{c}$$

ALGENWACHSTUM UND NITRATKONZENTRATION

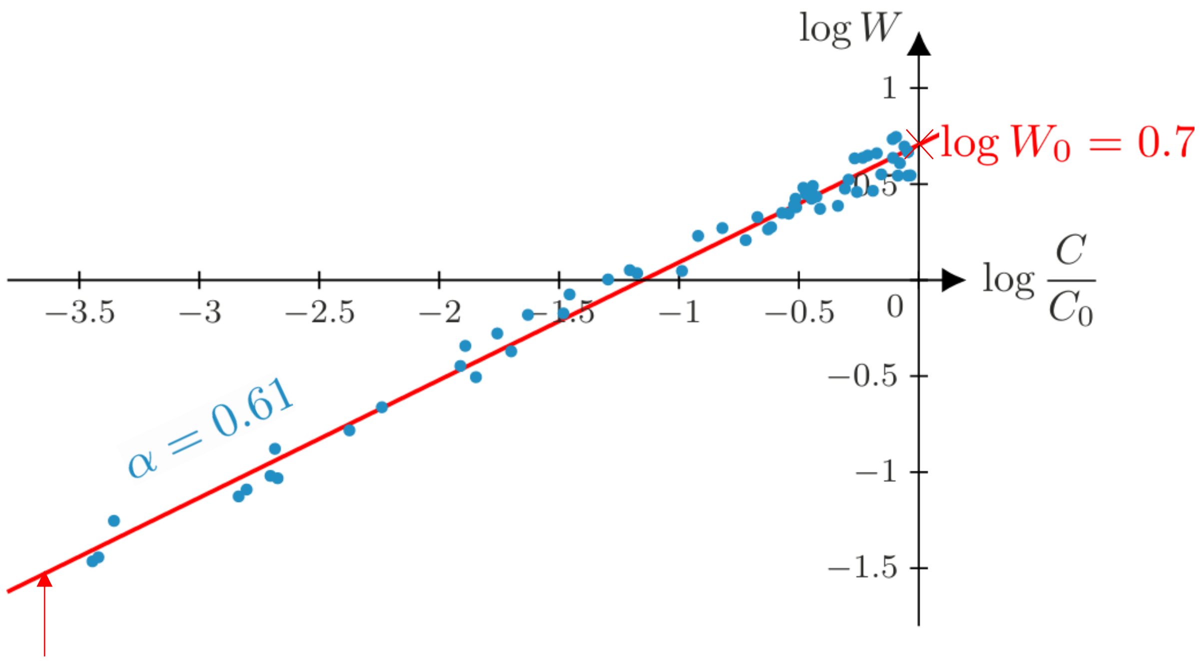
- X(t) = Algenkonzentration
  C=Nitratkonzentration
- Wachstum der Algenkonzentration bei konstanter Nitratkonzentration:
  $X'(t)=\lambda X(t)$
- $\lambda=\lambda(C)$ Wachstumskoeffizient $\lambda(C) = \frac{X'(t)}{X(t)} =: W$
- Relative Wachstumsgeschwindigkeit W: Wachstum/Konzentration „spezifisches Wachstum“



ALGENWACHSTUM UND NITRATKONZENTRATION

$$W = W_0 \left(\frac{C}{C_0} \right)^{\alpha}$$

$$\underbrace{\log W = {\color{red}\log W_0} + {\color{blue}\alpha} \log \frac{C}{C_0}}_{\text{Regressionsgerade}}$$



LINEARE MODELLE MIT EINER SYSTEMVARIABLE
EIN SEE ALS LINEARER DURCHFLUSSREAKTOR

- Konzentration eines Stoffes, der vom **Zufluss** in den See eingetragen, **im See** mit einer bestimmten Rate abgebaut und vom **Abfluss** wieder rausgetragen wird
- $V = \text{Volumen des Sees } [\text{m}^3] \text{ (konstant)}$
  $Q = Q(t) = \text{Zufluss} = \text{Abfluss } [\text{m}^3\text{s}^{-1}] \text{ (Wassermenge pro Zeiteinheit)}$
  $C_{\text{in}} = C_{\text{in}}(t) = \text{Konzentration eines Stoffs im Zufluss } [\text{kg/m}^3]$
  $C = C(t) = \text{Konzentration des Stoffs im Seewasser } [\text{kg/m}^3]$
  $k = \text{Abbaurate des Stoffs im Seewasser } [\text{sec}^{-1}] \text{ (konstant)}$
- Masse M(t) des Stoffes im See zur Zeit t : M(t)=VC(t)
- Um ein Modell zu erstellen, benötigen wir die **Massenbilanz** des Stoffes im See

LINEARE MODELLE MIT EINER SYSTEMVARIABLE
EIN SEE ALS LINEARER DURCHFLUSSREAKTOR

- Massenbilanz des Stoffes im See im Zeitintervall [t,t+Δt]

→Änderung der Masse M(t+Δt)- M(t)kommt auf 3 Arten zustande:

→Änderung der Stoffmenge im See = Zufuhr – Abfuhr – Abbau des Stoffes

Konzentrationen bleiben näherungsweise konstant

$$M(t+\Delta t) - M(t) = C_{\text{in}}Q(t)\Delta t - C(t)Q(t)\Delta t - kM(t)\Delta t$$

$$V(C(t+\Delta t) - C(t)) = C_{\text{in}}Q(t)\Delta t - C(t)Q(t)\Delta t - kVC(t)\Delta t \quad |: \Delta t \text{ und } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C'(t)$$

$$\rightarrow \quad VC'(t) = QC_{\text{in}} - QC - kVC$$

LINEARE MODELLE MIT EINER SYSTEMVARIABLE

EIN SEE ALS LINEARER DURCHFLUSSREAKTOR

$$VC'(t) = QC_{\text{in}} - QC - \text{kVC} \qquad | : \text{V}$$

momentane Änderungsrate = momentane Zufuhrrate – momentane Abfuhrrate – momentane Abbaurate

→Änderungsratenbilanz

Annahme: alle auftretenden Koeffizienten (also auch Q und C_{in}) sind konstant

$$C' = \underbrace{\frac{Q}{V}C_{\text{in}}}_{\text{inhomogen}} - \underbrace{C\left(\frac{Q}{V} + k\right)}_{\text{Homogener Teil}}$$

Allgemeine Lösung = Partikuläre Lösung: $C_\infty = \dfrac{QC_{\text{in}}}{Q + kV}$ + Homogene Lösung: $C_{\text{hom}}(t) := \lambda\,\mathrm{e}^{-t(k+Q/V)}$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

Partikuläre Lösung:

$$C'(t) = \frac{Q}{V} c_{in} - \left(\frac{Q}{V} + k\right) C$$

stationäre Lösung

z.B. $C'(t) = 0 \wedge C(t) = C_\infty = \text{konstant}$

$$0 = \frac{Q}{V} C_{in} - \left(\frac{Q}{V} + k\right) C_\infty$$

$$C_\infty \left(\frac{Q}{V} + k\right) = \frac{Q}{V} C_{in}$$

$$C_\infty = \frac{\frac{Q}{V} C_{in}}{\frac{Q}{V} + k} \cdot \frac{V}{V}$$

$$C_\infty = \frac{Q\, C_{in}}{Q + kV}$$

ALTERNATIVE: Q, C_{IN}, k NICHT KONSTANT

$$C' = \underbrace{\frac{Q(t)}{V} C_{\text{in}}(t)}_{\text{inhomogen}} - \underbrace{C\left(\frac{Q(t)}{V} + k(t)\right)}_{\text{Homogener Teil}}$$

Homogene Lösung: $C_{hom}(t) = c \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau}$

Finden der allgemeinen Lösung durch Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung : $C(t) = \left[C(t_0) + \int_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{\int_{t_0}^{s} A(\tau)\, d\tau}\, ds\right] \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau}$

ALTERNATIVE: Q, C_{IN}, k NICHT KONSTANT

$Q(t)$, $C\_in(t)$, $k(t)$

Es gilt weiterhin:

$$C'(t) = \underbrace{\frac{Q(t)}{V} C_{in}(t)}_{B(t)} - \overbrace{\underbrace{\left(\frac{Q(t)}{V} + k(t)\right)}_{A(t)} C(t)}^{\text{homogener Teil}}$$

$$\Leftrightarrow C'(t) + A(t)\,C(t) = B(t)$$

homogene Lsg:

$$C_{hom}(t) = k \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}$$

$k = C(t_0)$

partikuläre Lsg.: wir nehmen an, das k doch keine Konstante ist sondern eine Funktion zur Zeit t: K(t). (Variation der Konstanten)

Somit gilt: $C(t) = K(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}$ | Ableiten mit Produktregel

$$C'_{hom} = K'(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} + K(t) \cdot (-A(t)) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}$$ | einsetzen in $C' + AC = B$

$$\left(K'(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} \cancel{- K(t) \cdot A(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}}\right) \cancel{+ A(t) \cdot \left(K(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\right.}\left.\right) = B(t)$$

Also: $K'(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} = B(t)$ | nach $K'(t)$ umstellen

$$K'(t) = \frac{B(t)}{e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}} = B(t) \cdot e^{+\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}$$ | Integrieren (von t_0 bis t)

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{\int_{t_0}^{s} A(\tau)\,d\tau}\,ds + C(t_0)$$ | K(t) in $C_{hom}(t)$ einsetzen

$C(t_0)$ → Integrationskonstante

$$\Rightarrow C(t) = \left(\int_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{\int_{t_0}^{s} A(\tau)\,d\tau}\,ds + C(t_0)\right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{C(t) = \int_{t_0}^{t} B(s) \cdot e^{\int_{t_0}^{s} A(\tau)\,d\tau}\,ds \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} + e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau}\,C(t_0)}}$$ allgemeine Lsg.

t = Endzeitpunkt t_0 = Endzeitpunkt s = Laufvariable außen τ = Laufvariable innen

LINEARE MODELLE MIT EINER SYSTEMVARIABLE

EIN SEE ALS LINEARER DURCHFLUSSREAKTOR

$$C(t) = C_\infty + \lambda\,\mathrm{e}^{-t(k+Q/V)}$$

$t = 0$ Anfangswert $C(0) = C_0$

$$C(0)=C_0=C_\infty+\lambda e^0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = C_0 - C_\infty$$

$$C(t) = C_\infty + (C_0 - C_\infty)\,\mathrm{e}^{-t(k+Q/V)}$$

$$C_{\text{hom}}(t) = C(t) - C_\infty$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k + Q/V} \qquad T_{1/20} = \frac{\ln 20}{k + Q/V}$$

Halbwertszeit Anpassungszeit

Halbwertszeit $T_{1/2}$

$$C_{hom}(t) = \lambda e^{-t(k+\frac{Q}{V})} = C(t) - C_\infty$$

$$C_{hom}(T_{1/2}) = \frac{1}{2} C_{hom}(0)$$

$$C(T_{1/2}) - C_\infty = \frac{1}{2} C(0) - C_\infty$$

$$\lambda e^{-T_{1/2}(k+\frac{Q}{V})} = \frac{1}{2} \lambda e^0 \qquad | : \lambda$$

$$e^{-T_{1/2}(k+\frac{Q}{V})} = \frac{1}{2} \qquad | \ln()$$

$$-T_{1/2}\left(k+\frac{Q}{V}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \qquad | : -\left(k+\frac{Q}{V}\right)$$

$$\Longrightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k+\frac{Q}{V}}$$

Anpassungszeit $T_{1/20}$

$$C_{hom}(t) = \lambda e^{-t\left(k+\frac{Q}{V}\right)} = C(t) - C_\infty$$

$$C_{hom}(T_{1/20}) = \frac{1}{20} C_{hom}(0)$$

$$C(T_{1/20}) - C_\infty = \frac{1}{20} C(0) - C_\infty$$

$$\lambda e^{-T_{1/20}\left(k+\frac{Q}{V}\right)} = \frac{1}{20} \lambda e^{0} \qquad \Big| :\lambda$$

$$e^{-T_{1/20}\left(k+\frac{Q}{V}\right)} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \ln()$$

$$-T_{1/20}\left(k+\frac{Q}{V}\right) = \ln\left(\frac{1}{20}\right) = -\ln(20) \qquad \Big| :-\left(k+\frac{Q}{V}\right)$$

$$\Longrightarrow T_{1/20} = \frac{\ln(20)}{k+\frac{Q}{V}}$$

HALLWILER SEE

Volumen des Hallwiler Sees: $V = 2.15 \times 10^8$ m^3

Phosphatbelastung im Jahr 1985: $C_0 = 2.5 \times 10^{-4}$ kg/m^3

Zufluss = Abfluss: $Q = 1.4$ m^3/sec

Heutige Phosphatbelastung des Zuflusses: $C_{\text{in}} = 4 \times 10^{-5}$ kg/m^3

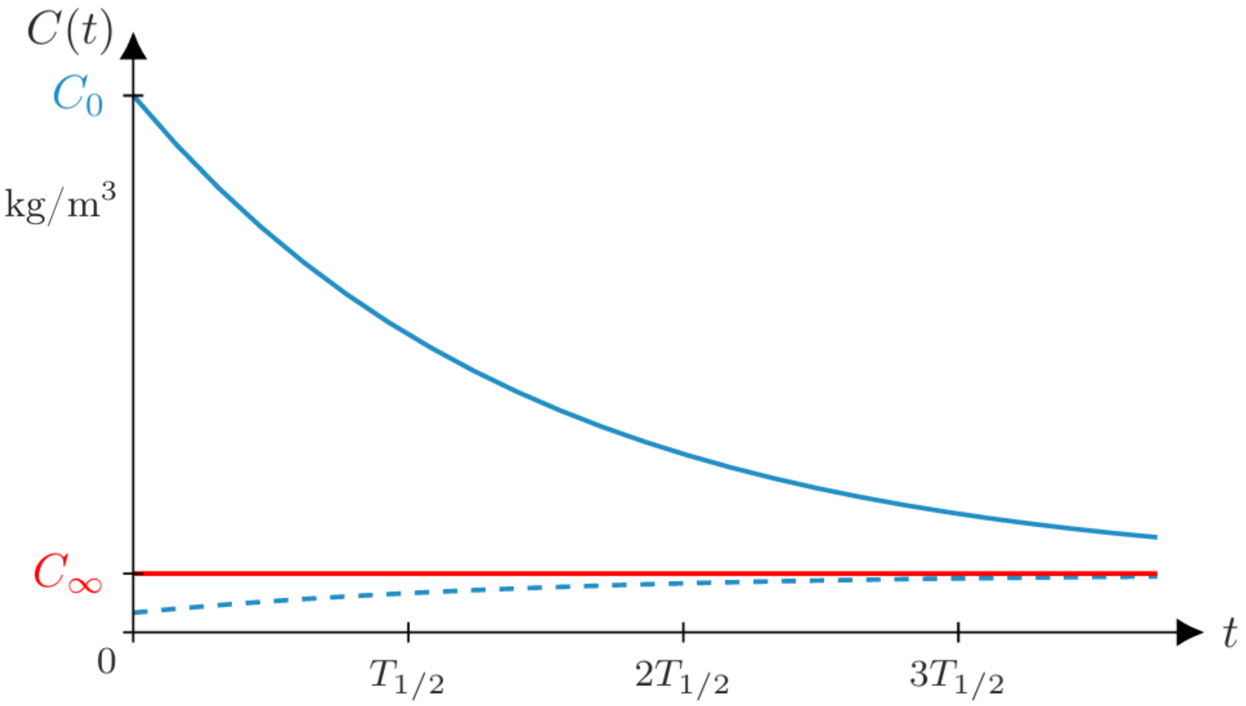
Geschätzte Abbaurate des Phosphats: $k = 3 \times 10^{-9}$ sec^{-1}

→ $C_\infty \approx 2.7 \times 10^{-5}$ kg/m^3

langfristiges Ziel von Phosphat im Hallwiler See:

3×10^{-5} kg/m^3

Halbwertszeit: 2.3 Jahren



STOFFAUSTAUSCH AN GRENZEN

- Eisenfische → Lucky Iron Fish
- Def.: Grenzfläche

  Fläche, wo zwei unterschiedliche Medien A und B aneinander stoßen

  Bsp.: Gas ↔ Flüssigkeit, Flüssigkeit ↔ Feststoff
- Nun betrachten wir einen Stoff S, der in beiden Medien mit den Konzentrationen C_A und C_B gelöst ist
- Dafür gibt es zwei wichtige Gesetze:

GESETZE VON HENRY

- Im Gleichgewichtszustand:

  Die Konzentrationen C_A und C_B ändern sich nicht

  →Proportionalitätskonstante: $\frac{C_\mathrm{A}}{C_\mathrm{B}} = K_{\mathrm{A/B}}$ „Henry-Koeffizient“

- Außerhalb des Gleichgewichtszustands:

  Das System versucht den Gleichgewichtszustand zu erreichen

  Stoffaustausch an der Grenzfläche: $F_{\mathrm{A/B}} = v_{\mathrm{A/B}}\left(C_\mathrm{A} - C_\mathrm{A}^{\mathrm{eq}}\right)$

  $F_{A/B}$= Massenfluss netto von A nach B (pro Flächen- und Zeiteinheit)

  $\upsilon_{A/B}$= Austauschgeschwindigkeit (konstant)

  $C_\mathrm{A}^{\mathrm{eq}}$:= $C_B K_{A/B}$ = Konzentration von S in A, die mit C_B im Gleichgewicht wäre

MEHRDIMENSIONALE MODELLE
LINEARES ZWEIBOXMODELL

- Wir betrachten wieder den See mit Zu- und Abfluss sowie das Sediment und wählen folgende Bezeichnungen für die betrachtenden Größen:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \text{Volumen des Sees (konstant)}\\
V_2 &= \text{Volumen des Sediments (konstant)}\\
A &= \text{Fläche der Grenzschicht zwischen Seewasser und Sediment}\\
Q &= Q(t) = \text{Zufluss} = \text{Abfluss (Wassermenge pro Zeiteinheit)}\\
C_{\text{in}} &= C_{\text{in}}(t) = \text{Konzentration eines Stoffs im Zufluss}\\
C_1 &= C_1(t) = \text{Konzentration des Stoffs im Seewasser}\\
C_2 &= C_2(t) = \text{Konzentration des Stoffs im Sediment}
\end{aligned}$$

MEHRDIMENSIONALE MODELLE
LINEARES ZWEIBOXMODELL

- Bilanz der Änderungsrate:
  - Für den See:

    momentane Änderungsrate =

    momentane Zuflussrate–momentane Abfuhrrate –momentane Abbaurate durch Sedimentation

    $$V_1 C_1'(t) = QC_{\text{in}} - QC_1 - \upsilon_{1/2}(C_1 - C_2 K_{1/2})A$$
  - Für das Sediment:

    momentane Änderungsrate = momentane Zufuhrrate durch Sedimentation

    $$V_2 C'_2(t) = \upsilon_{1/2}(C_1 - C_2 K_{1/2})A$$

MEHRDIMENSIONALE MODELLE

LINEARES ZWEIBOXMODELL

$$V_1 C_1'(t) = QC_{\text{in}} - QC_1 - v_{1/2}(C_1 - C_2 K_{1/2})A$$

$$V_2 C'_2(t) = v_{1/2}(C_1 - C_2 K_{1/2})A$$

$$C := \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} : \quad C' = MC + B$$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{Q + Av_{1/2}}{V_1} & \frac{v_{1/2}K_{1/2}A}{V_1} \\ \frac{v_{1/2}A}{V_2} & -\frac{v_{1/2}K_{1/2}A}{V_2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{QC_{\text{in}}}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

MEHRDIMENSIONALE MODELLE

LINEARES ZWEIBOXMODELL

Partikuläre Lösung:

$$C_\infty = -M^{-1}B$$

zugehörige homogene Gleichung: $C' = MC$

$$C_{\text{hom}}(t) = e^{Mt}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung: $C(t) = C_\infty + e^{Mt}\lambda$

$t = 0 \quad$ Anfangswert $C(0) = C_0$

$$C(t) = C_\infty + e^{Mt}(C_0 - C_\infty)$$

$C(0)=C_0=C_\infty+\lambda e^0$

$\Leftrightarrow \lambda = C_0 - C_\infty$

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT

Information zum Matrixexponential:

Satz 3.6.2
Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

1. Die Funktion $\mathbb{R} \to M_{n\times n}$,

$$t \mapsto e^{tA} = E_n + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \ldots$$

   ist differenzierbar mit Ableitung $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA}$.
2. Die Spaltenvektoren der Matrix e^{tA} bilden eine Basis des Lösungsraumes von $y' = Ay$.
3. Wie im Fall $n = 1$ gilt
   a) Die allgemeine Lösung y von $y' = Ay$ schreibt sich als

$$y(t) = \underbrace{e^{tA}C}_{\text{Matrix mal Vektor}} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad C_i \text{ konstant.}$$

   b) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $y(t) = e^{tA}y_0$ die eindeutige Lösung der DGL-Systems $y' = Ay$ mit $y(0) = y_0$.