

# Nichtlineare Modelle

Mathematische Modellierung  
Seminarsitzung 19.01.2026  
Vert Rizkalla

# Gliederung

## Warum nichtlineare Modelle?

## Eindimensionale Modelle

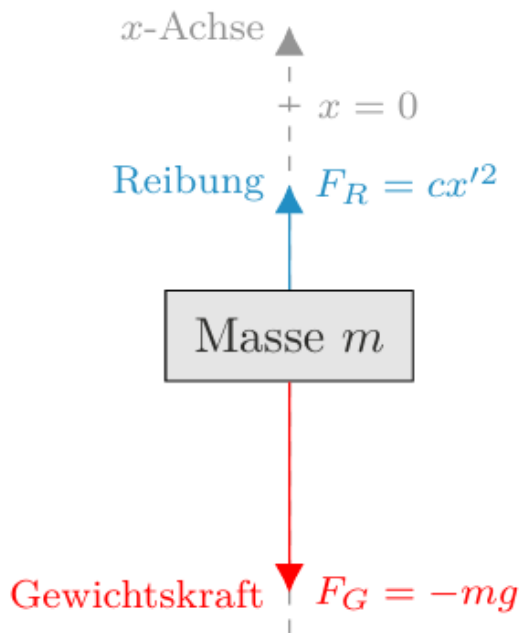
- Logistische Gleichung
- Bsp.: Wachstum von Tumoren
- Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts
- Linearisierung

## Mehrdimensionale Modelle

- Räuber-Beute-Modell
- Lösungskurve im Lotka-Volterra-Modell
- Linearisierung in zwei Dimensionen

# Warum nichtlineare Modelle?

- Die meisten Phänomene sind nicht linear. Wir nennen sie nichtlinear.
- Oft werden Aspekte außer Acht gelassen oder Annahmen vereinfacht
- Beispiele:



Der freie Fall

Das exponentielle Wachstum (3.1.1)

- $y' = \alpha y$
- Lösung mit  $y(t) = y_0 \cdot e^{\alpha t}$  mit  $y_0 = y(0)$  für große  $t$  unrealistisch
- Besser: logistische DGL  $y' = y(1-y)$

Weitere Beispiele

- Eulersche Knicklast ist ein rein nichtlineares Phänomen
- Henry-Koeffizient im Henry-Gesetz (1.4.1) nicht konstant

Lineare Modelle sind daher meist jeweils eine Approximation. Nichtlineare Gleichungen erlauben eine genauere Beschreibung, sind aber meist schwieriger zu lösen als lineare und unter Umständen gibt es keine expliziten Lösungen.

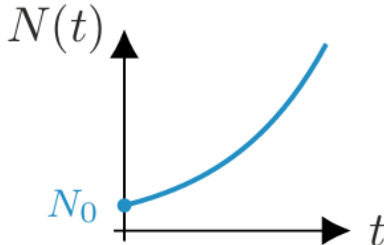
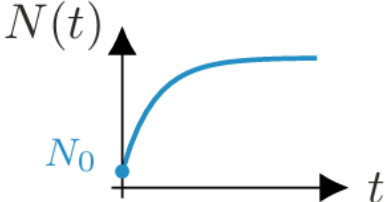
# Warum nichtlineare Modelle?

- Lineare Modelle sind oft Approximativ
- Nichtlineare Gleichungen erlauben genauere Beschreibung
- Können numerisch untersucht werden, aber numerische Ergebnisse sind fehlerhaft (Rundungsfehler, Schrittweiten,...)
- Qualitative mathematische Methoden liefern zuverlässige Aussagen über globales/langfristiges Verhalten von Lösungen
  - Ziel: Verständnis über allg. Verhalten des Systems ohne exakte Zahlen
  - Bsp.: Langzeitverhalten ( $t \rightarrow \infty$ ), Periodizität von Lösungen, Verhalten bei Störungen eines Gleichgewichts
  - Dafür nutzt man die Linearisierung (zur Vereinfachung der Analyse)

# Eindimensionale Modelle

- Werden beschrieben durch die DGL  $y'(t) = F(y(t))$  mit Anfangswert  $y(0) = y_0$
- Wir gehen davon aus, dass es gelingt die DGL in einer expliziten Form  $y'(t) = F(y(t))$  zu schreiben
- Rechte Seite ist dann Ausdruck, der nur von  $y$  abhängig ist

# Logistische Gleichung

Exponentiell	Beschränktes Wachstum
$N'(t) = r_1 \cdot N(t)$	$N'(t) = r_2 \cdot (K - N(t))$ oder $N'(t) = r_2 \cdot (K - N(t))/K$
Exponentiell wachsend	<b>Zunächst linear</b> wachsend, wird dann gebremst
	

In einem Sachzusammenhang: Zu Beginn (bei ausreichenden Ressourcen wie Raum oder Nahrung) ein eher exponentielles Wachstum zu erwarten, der mit der Zeit gebremst wird

# Logistische Gleichung

- Kombinieren wir die rechte Seite der beiden Entwicklung ,mit  $r_3 = r_1 r_2$ , erhalten wir:

$$N'(t) = r_3 \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) = r_3 \cdot K \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

- Fassen wir mit  $r = r_3 \cdot K$  zusammen erhalten wir die DGL:

$$\text{Logistische Gleichung: } N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \quad r > 0$$

Wobei  $r \cdot N(t)$  als Wachstumsterm und  $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$  als Beschränkungsterm dienen

Das heißt:

K=max. Population

r=Wachstumsrate

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

Wir schauen uns den Fall  $0 < N_0 = N(0) < K$  an

## 1. Monoton wachsend für $N(t) < K$ :

Ausgangspopulation  $N(0)$  zws. 0 und  $K$ ,

bzw.  $0 < \frac{N(0)}{K} < 1$  und  $1 - \frac{N(0)}{K} > 0$

Mit  $r > 0$  gilt:

$N'(0) = r \cdot N(0) \cdot \left(1 - \frac{N(0)}{K}\right) > 0$  und im Verlauf auch  $N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0$  so lange  $N(t) < K$

## 2. Exponentielles Wachstum verlangsamt sich

In der Regel: zu Beginn  $N(t) \ll K \Rightarrow \frac{N(t)}{K} \approx 0$  bzw.  $1 - \frac{N(t)}{K} \approx 1$

$\Rightarrow N'(t) \approx r \cdot N(t)$

Das heißt, zu Beginn fast exponentielles Wachstum, verlangsamt sich mit  $N(t) \rightarrow K$

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

## 3. Stationärer Zustand:

Für  $N_\infty = K$  gilt:

$$\frac{N_\infty}{K} = 1 \Rightarrow N'_\infty = r \cdot K \cdot \left(1 - \frac{K}{K}\right) = 0$$

Das heißt bei  $N_\infty = K$  gibt es kein Wachstum

$\Rightarrow K$  ist die obere Schranke

$\Rightarrow$  stationäre Lösung

## 4. Wendepunkt:

Wie verändert sich allenfalls die Wachstumsgeschwindigkeit  $N'(t)$ ? Wo liegen allfällige Wendepunkte auf der Lösungskurve?

Zum Beantworten der Fragen berechnen wir  $N''(t)$  und berechnen die allfälligen Nullstellen.

**Wir kürzen  $N(t) = N$**

$$N'' = (N')' = \left( rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \right)' = \left( rN - \frac{r}{K} N^2 \right)' = rN' - \frac{r}{K} (N^2)'$$

Wir leiten  $N^2$  ab

Kettenregel:  $(N^2)' = 2N \cdot N'$  oder

Produktregel:  $(NN)' = N' \cdot N + N \cdot N' = 2N \cdot N'$

Einsetzen:  $N'' = rN' - \frac{r}{K} (N^2)' = rN' - \frac{2r}{K} N \cdot N' = rN' \left( 1 - \frac{2}{K} N \right) \quad | \ rN' > 0$

Nullstelle von  $1 - \frac{2}{K} N$  berechnen:

$$0 = 1 - \frac{2}{K} N \quad | \cdot K$$

$$0 \cdot K = K \left( 1 - \frac{2}{K} N \right)$$

$$0 = K - 2N \quad | -K$$

$$-K = -2N \quad | :(-2)$$

$$N = \frac{K}{2}$$

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

## 3. Stationärer Zustand:

Für  $N_\infty = K$  gilt:

$$\frac{N_\infty}{K} = 1 \Rightarrow N'_\infty = r \cdot K \cdot \left(1 - \frac{K}{K}\right) = 0$$

Das heißt bei  $N_\infty = K$  gibt es kein Wachstum

$\Rightarrow K$  ist obere Schranke

$\Rightarrow$  stationäre Lösung

## 4. Wendepunkt:

Wie verändert sich allenfalls die Wachstumsgeschwindigkeit  $N'$ ? Wo liegen allfällige Wendepunkte auf der Lösungskurve?

Zum Beantworten der Fragen berechnen wir  $N''(t)$  und berechnen die allfällige Nullstellen.

$\Rightarrow$  Nullstelle bei  $N = \frac{K}{2}$ , das heißt, bei  $N$  ist ein Wendepunkt.

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

5. Wendepunkt bei  $N(0) < \frac{K}{2}$  :

Sei  $t_w$  der Zeitpunkt wo  $N(t_w) = \frac{K}{2}$  gilt.

=> Nullstelle der 2. Ableitung und Wendepunkt

Sei zu Beginn  $N(0) = N_0 < \frac{K}{2}$ , so gilt:

$$\frac{2N(0)}{K} < 1 \text{ beziehungsweise } 1 - \frac{2N(0)}{K} > 0$$

Da  $rN' > 0$  gilt zunächst  $N'' > 0$  und das Vorzeichen der 2. Ableitung wechselt zurzeit  $t_w$  von + nach -

N hat dort ein Wendepunkt, das heißt der Graph geht von einer Linkskurve ( $N'' > 0$ ) in eine Rechtskurve ( $N'' < 0$ )

Für  $t < t_w$  ist  $N'$  streng monoton wachsend (Linkskurve bei  $N'' > 0$ ) und für  $t > t_w$  streng monoton fallend (Rechtskurve bei  $N'' < 0$ )

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

## 6. Wendepunkt bei $N(0) \geq \frac{K}{2}$ :

Starten wir mit  $N(0) \geq \frac{K}{2}$  so gibt es kein Wendepunkt und die Wachstumsgeschwindigkeit monoton fallend

## 7. $N(0) > K$ :

Angenommen Anfangspopulation ist größer als  $K$ , so gilt:

$N'(t)$  mit  $0 < \frac{K}{N(0)} \Rightarrow \frac{N(0)}{K} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{N(0)}{K} < 0$  oder allgemein  $N'(t) < 0$

also ist  $N$  streng monoton fallend so lange  $K < N(t)$

# Qualitatives Verhalten der Entwicklung

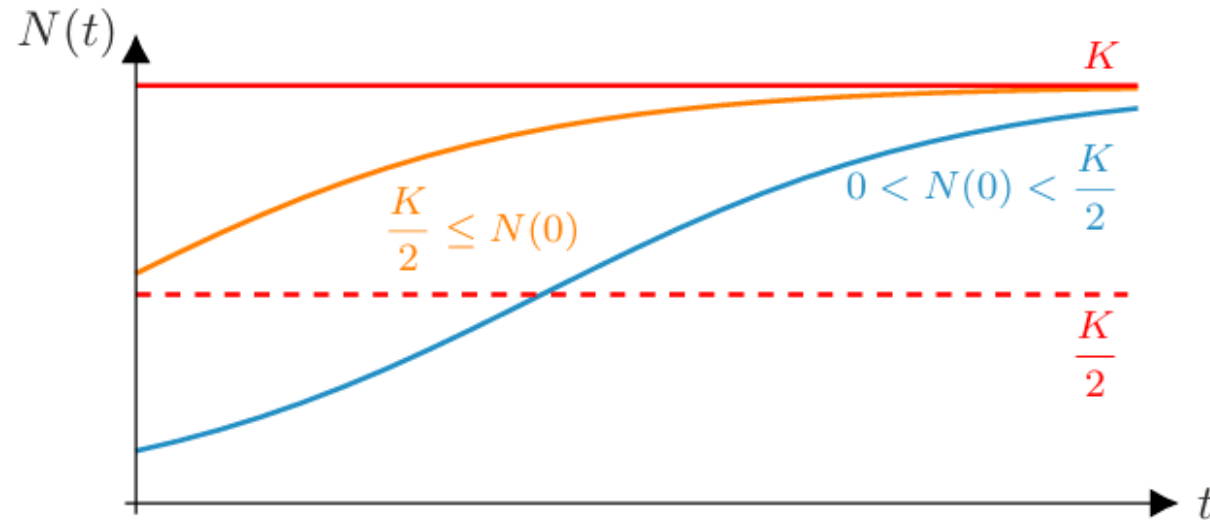


Abb. 5.2 Lösungskurven der logistischen DGL für unterschiedliche Startwerte  $N(0)$

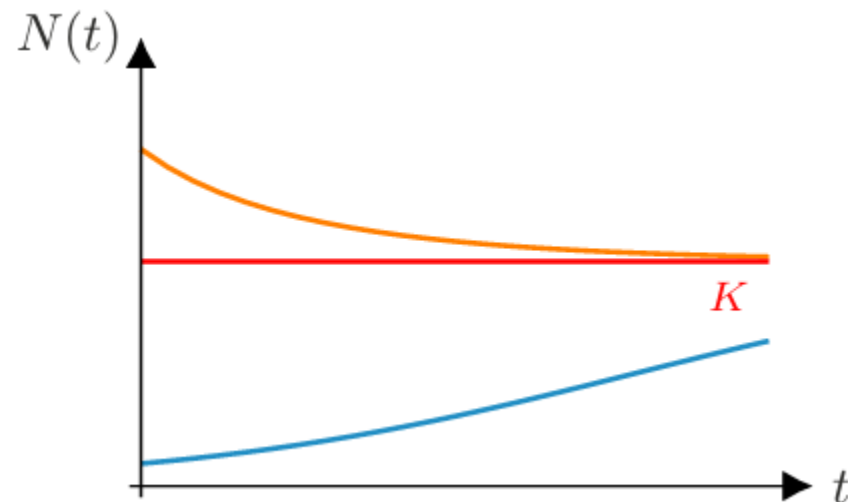


Abb. 5.3 Lösungskurven der logistischen DGL für  $N(0) > K$  und  $N(0) < K$

# Explizite Lösung der logistischen DGL

- Lässt sich durch Trennung der Variablen berechnen

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0 (e^{rt} - 1)} = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}}$$

- Für  $t \rightarrow \infty$  geht  $N(t) \rightarrow K$  (Sättigung)
- Für  $t \rightarrow 0$  geht  $N(t) \rightarrow N_0$  (Startwert)

# Wachstum von Tumoren

Modell nach B. Gompertz

Anzahl der Zellen wird beschrieben mit der DGL  $N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$

Mit  $0 < N_0 = N(0) < K$ ,  $r > 0$  und  $\ln$  als natürliche Logarithmus

## 1. Streng monoton wachsend:

Sei  $0 < N(0) < K$ , so gilt:

$$\frac{K}{N(0)} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{K}{N(0)}\right) > 0, r > 0$$

Das heißt  $r \cdot N(t) > 0$  und  $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) > 0 \Rightarrow$  ist streng monoton wachsend für  $N(t) < K$

$N(t) \rightarrow K$  so auch  $\frac{K}{N(t)} \rightarrow 1$  und  $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \rightarrow 0$

Das heißt das Wachstum wird immer langsamer

# Wachstum von Tumoren

## 2. Stationärer Zustand:

Für  $N_\infty = K$  folgt  $\frac{K}{N_\infty} = 1$  und  $N'_\infty = r \cdot K \cdot \ln(1) = 0$

Kein Wachstum mehr  $\Rightarrow K$  obere Schranke

Entwicklung wächst im Laufe der Zeit und nähert sich immer weiter der Asymptote  $N_\infty = K$  an  $\Rightarrow$  stationäre Lösung der DGL

## 3. Wendepunkt/Wachstumsänderung:

Wir rechnen wieder  $N''$  aus, um die Nullstellen zu berechnen

Mit Logarithmieren folgt  $\ln\left(\frac{K}{N(0)}\right) > \ln(e) = 1$  und

$\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) - 1 > 0$  auf der rechten Seite

Zu dem Zeitpunkt  $N(t_w) = \frac{K}{e}$  wechselt das

Vorzeichen von  $+$  nach  $-$

Graph geht von Linkskurve zu Rechtskurve über

$$N'' = (N')' = \left( rN \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right)' = rN' \cdot \ln \left( \frac{K}{N} \right) + rN \cdot \left( \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right)'$$

Wir leiten  $\ln \left( \frac{K}{N} \right)$  ab:

$$\begin{aligned} \left( \ln \left( \frac{K}{N} \right) \right)' &= (\ln(K) - \ln(N))' && | \ln(K) \text{ ist konstant, fällt weg} \\ &= (-\ln(N))' \\ &= -\left( \frac{1}{N} \cdot N' \right) \\ &= -\frac{N'}{N} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} N'' &= rN' \cdot \ln \left( \frac{K}{N} \right) - rN \cdot \frac{N'}{N} \\ &= rN' \cdot \ln \left( \frac{K}{N} \right) - rN' \\ &= rN' \left( \ln \left( \frac{K}{N} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

Da  $rN' \neq 0$  gilt suchen wir:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{K}{N} \right) - 1 &= 0 && | +1 \\ \ln \left( \frac{K}{N} \right) &= 1 \\ \frac{K}{N} &= e \\ N &= \frac{K}{e} \end{aligned}$$

# Wachstum von Tumoren

## 3. Wendepunkt/Wachstumsänderung:

Wir rechnen wieder  $N''$  aus, um die Nullstellen zu berechnen:

$$N = \frac{K}{e}$$

Mit Logarithmieren folgt  $\ln\left(\frac{K}{N(0)}\right) > \ln(e) = 1$  und  $\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) - 1 > 0$  auf der rechten Seite.

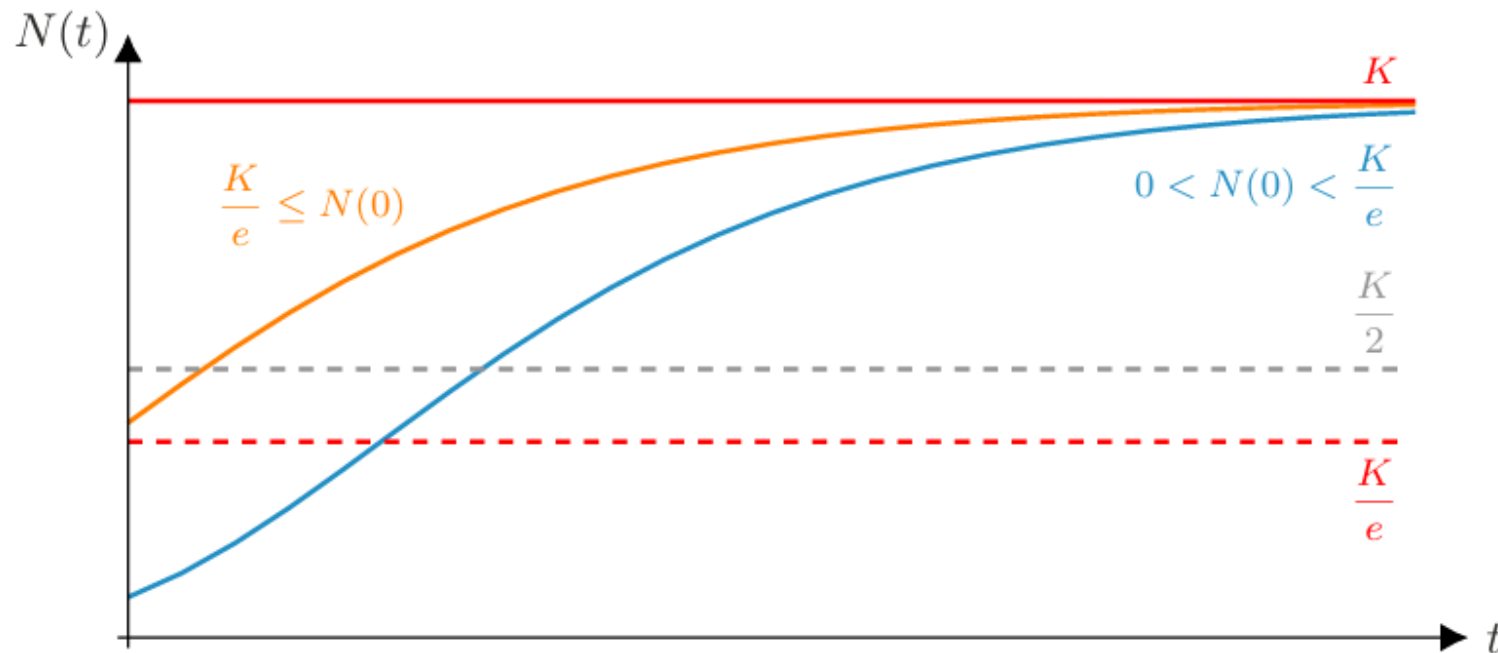
Zu dem Zeitpunkt  $N(t_w) = \frac{K}{e}$  wechselt das Vorzeichen von + nach –

Der Graph geht somit von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve über.

# Wachstum von Tumoren

4. Verlauf bei  $N(0) \geq \frac{K}{e}$ :

Starten wir mit  $N(0) \geq \frac{K}{e}$  gibt es kein Wendepunkt und die Wachstumsgeschwindigkeit ist monoton fallend



**Abb. 5.4** Wachstumsverlauf von Tumoren für unterschiedliche Startwerte  $N(0) = N_0$  der Lösung  $N(t) = K \exp(\ln(N_0/K) e^{-rt})$

# Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts

Wir gucken uns folgende Fragen an:

- Was passiert, wenn wir das Gleichgewicht minimal stören?
- Wie verhalten sich die Lösungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung  $y_\infty$ ?
- Konvergieren sie gegen  $y_\infty$ , oder werden sie von  $y_\infty$  abgestoßen? Können wir ein Kriterium für die Konvergenz in der Nähe  $y_\infty$  angeben?

# Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts

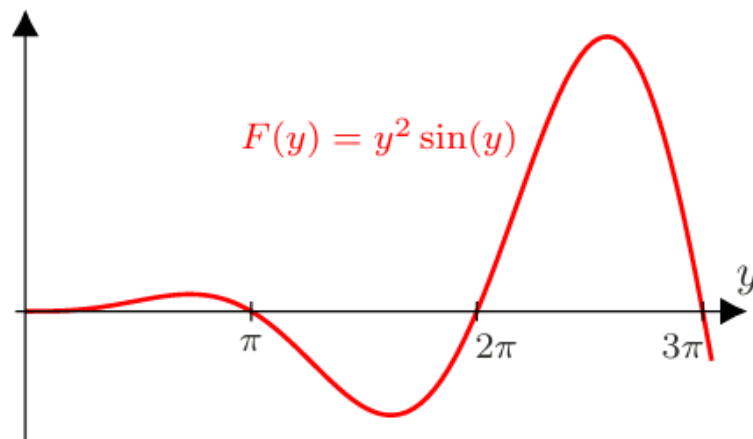
Beispiel: die DGL  $y' = y^2 \sin(y)$  mit einer Lösung  $f$ , startet im Streifen  $]k\pi, (k+1)\pi[$

→ Änderungsrate nur von  $y'$  abhängig

→  $y^2 \geq 0$  und  $\sin(y)$  oszilliert zwischen 1 und -1

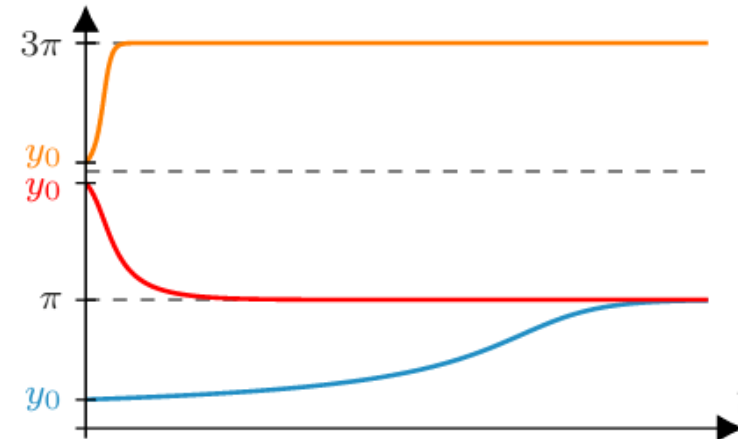
→ Nullstellen von  $F(y)$  bei  $y = k\pi \rightarrow$  bei  $F(k\pi) = 0$  sind die *stationären Lösungen*

**Wichtig! Nicht alle stationäre Lösungen sind stabil!**



$$y' = y^2 \sin(y)$$

$$y_{\infty, k} = k\pi$$



Lösungskurve bleibt in dem Streifen  $[k\pi, (k+1)\pi]$ , in dem sie startet.

Abb. 5.5 Graph  $y \mapsto F(y)$  und numerische Lösungen von  $y' = y^2 \sin(y)$

# Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts

Die Stabilität hängt davon ab, wie sich  $F(y)$  in der Nähe der Stelle verhält

→ wenn  $F(y) > 0$  für  $y$  leicht kleiner  $k\pi$  und  $F(y) < 0$  für  $y$  leicht größer  $k\pi$  dann fließt alles auf  $k\pi$  zu → Attraktor

→ wenn  $F(y) < 0$  für  $y$  kleiner und  $F(y) > 0$  für  $y$  größer dann fließt alles weg → Repeller

Was passiert in dem Intervall  $]k\pi, (k+1)\pi[$  ?

→ für gerades  $k$  →  $F(y) \geq 0$  steigen die Lösungen von  $k\pi$  zu  $(k+1)\pi$ , das heißt  $k\pi$  ist Repellor und  $(k+1)\pi$  ist Attraktor

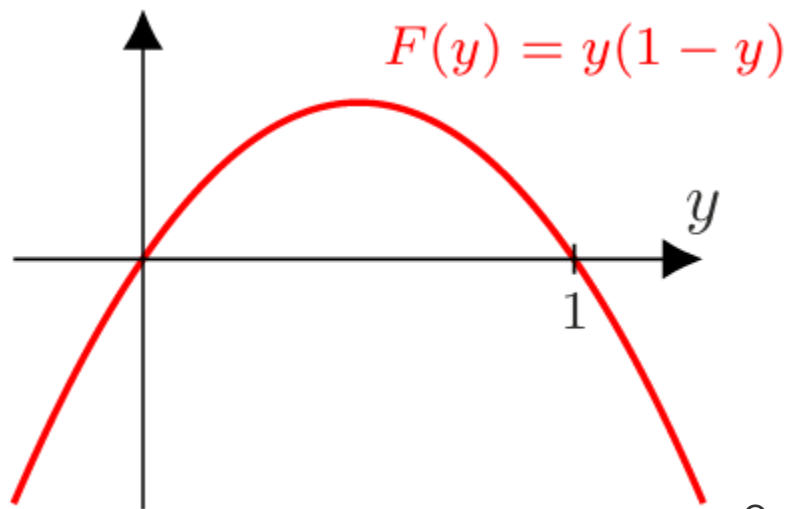
→ für ungerades  $k$  →  $F(y) \leq 0$  fallen die Lösungen von  $k\pi$  zu  $(k+1)\pi$ , das heißt  $k\pi$  ist Attraktor und  $(k+1)\pi$  ist Repellor

# Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts

Welche stationäre Lösung  $y_{\infty,k} = k\pi$  zieht  $f$  an? Konvergieren die Werte  $f(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $k\pi = y_{\infty,k}$  oder gegen  $(k+1)\pi = y_{\infty,k+1}$ ?

Wir betrachten die logistische DGL  $y' = y(1-y) = F(y)$  mit den stationären Lösungen  $y_{\infty,0} = 0$  und  $y_{\infty,1} = 1$

Steigung bei  $y = 0$  ist Null, sie nimmt zu bis  $y = \frac{1}{2}$  und nimmt wieder ab bis  $y = 1$  wo wieder Null erreicht wird

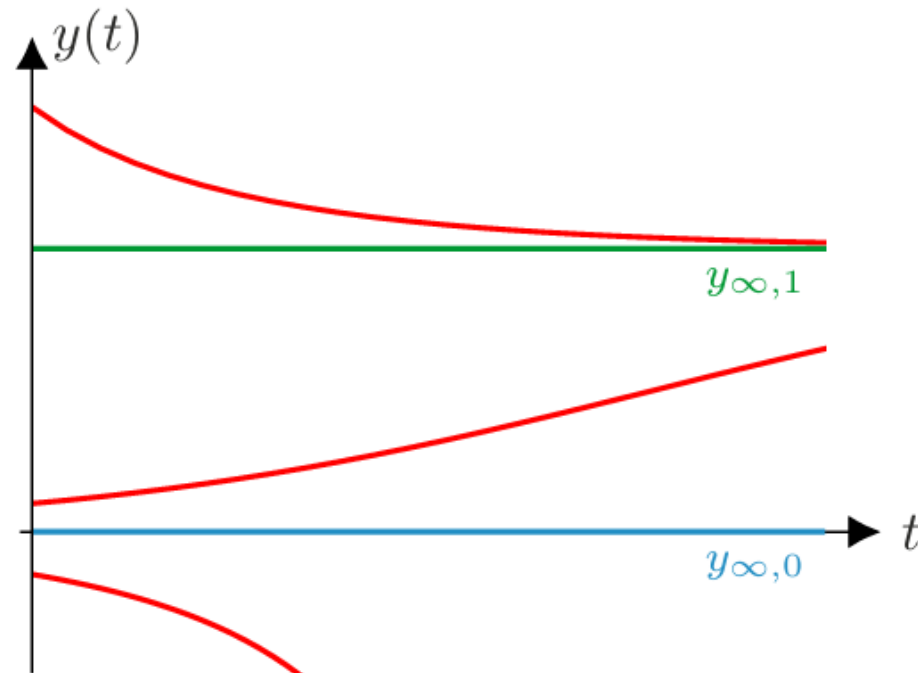


# Beschreibung in der Nähe eines Gleichgewichts

Für  $y < 0$  oder  $y > 1$  ist der Wert von  $F(y) < 0$  also Steigung ist negativ

→ stationäre Lösung  $y_{\infty,1}$  zieht Lösungen an und heißt Attraktor

→  $y_{\infty,0}$  stößt Lösungen in ihrer Näher ab und heißt Repeller



# Linearisierung

Wie lässt sich allgemein das Verhalten von Lösungen in der Nähe einer stationären Lösung genauer bestimmen?

- Ansatz  $y(t) = y_\infty + h(t)$
- Die Gleichung  $y' = F(y)$  in der Nähe einer stationären Lösung  $y_\infty$  linearisiert
- Einsetzen in die DGL liefert uns:

$$y' = (y_\infty + h)' = y'_\infty + h' = 0 + h' = h' = F(y_\infty + h)$$

- Taylor-Reihe für  $y \rightarrow F(y)$  an der Stelle  $y_\infty$

$$\rightarrow \text{mit } h = y - y_\infty : F(y_\infty + h) = F(y_\infty) + F'(y_\infty)h + \text{ThO}$$

$\rightarrow F(y_\infty) = 0$  und bei ThO gilt für kleines  $h$  die Potenz jeweils noch kleiner, dh. ThO werden als vernachlässigbar klein angesehen  $\rightarrow$  ThO wird beim Linearisieren weggelassen

- Mit  $h' = F(y_\infty + h)$  erhalten wir für  $h$  näherungsweise die DGL  $h' = F'(y_\infty)h$  mit der Lösung  $h(t) = h_0 e^{-F'(y_\infty)t}$  mit  $h_0 = h(0) = y_0 - y_\infty$

# Linearisierung

- In Ansatz eingesetzt ergibt das:

$$y(t) = y_{\infty} + (y_0 - y_{\infty}) \cdot e^{F'(y_{\infty})t} \quad (5.1)$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Kriterium:

1. Die stationären Lösungen der nichtlinearen Gleichung  $y' = F(y)$  sind die Nullstellen der rechten Seite  $F$ .
2. Die Lösung (5.1) der linearisierten Gleichung  $h' = F'(y_{\infty})h$  verhält sich in der Nähe der stationären Lösung  $y_{\infty}$  wie die exakte Lösung von  $y' = F(y)$ :

- a) Ist  $F'(y_{\infty}) < 0$ , so gilt  $e^{F'(y_{\infty})t} \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Für Lösungen  $y$ , die nahe genug bei  $y_{\infty}$  starten, folgt  $y(t) \rightarrow y_{\infty}$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Die stationäre Lösung ist in diesem Fall ein **Attraktor/stabiles Gleichgewicht**.

- b) Ist  $F'(y_{\infty}) > 0$ , so gilt: Egal wie nahe eine Lösung  $y$  bei  $y_{\infty}$  startet, die Werte  $y(t)$  entfernen sich von  $y_{\infty}$ .

Die stationäre Lösung ist in diesem Fall ein **Repeller/ein instabiles Gleichgewicht**.

# Mehrdimensionale Modelle

Wir untersuchen nun Modelle, bei denen sich mehrere Modellparameter *kontinuierlich* im Laufe der Zeit *nicht linear* verändern.

Das heißt die Modelle sind weder diskret noch linear.

Wir schauen uns zwei Populationen mit Räuber  $x$  und Beute  $y$  an

Diskret:  $x_{n+1} = a x_n + b y_n$  und  $y_{n+1} = c y_n + d x_n$

kompakt  $\Rightarrow v_{n+1} = A v_n$  mit  $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  und  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -d & c \end{pmatrix}$

Linear:  $x'(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$  und  $y'(t) = \gamma y(t) + \delta x(t)$

kompakt  $\Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

# Räuber-Beute-Modell

Variablen:

- $x(t)$  Anzahl der Räuber zur Zeit  $t$
- $y(t)$  Anzahl der Beutetiere zur Zeit  $t$
- $s > 0$  Sterberate der Räuber wenn keine Beute
- $r > 0$  Reproduktionsrate der Beute in Abwesenheit von Räubern
- $\alpha > 0$  Begegnungskonstante
- $\beta$  zeigt Wahrscheinlichkeit, dass Begegnung dazu führt gefressen zu werden
- $\gamma$  ist der Jagderfolg

Mit diesen Variablen bekommen wir:

# Räuber-Beute-Modell

- $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = -sx(t)\Delta t$  → Abnahme durch natürlichen Tod
- $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) = ry(t)\Delta t$  → Zunahme durch Reproduktion
- $\alpha xy\Delta t$  → Anzahl der Begegnung zwischen Beute und Räuber
- $\Delta y = -\alpha\beta xy\Delta t$  → Dezimierung durch Fraß
- $\Delta x = \alpha\gamma xy\Delta t$  → Zunahme durch Reproduktion
- Änderung der Räuberpopulation:  
Abnahme durch natürlichen Tod + Zunahme durch Reproduktion  
 $\Delta x = -sx(t)\Delta t + \alpha\gamma xy\Delta t$
- Änderung der Beutepopulation:  
Zunahme durch Reproduktion + Dezimierung durch Fraß  
 $\Delta y = ry(t)\Delta t - \alpha\beta xy\Delta t$

# Herleitung der Lotka-Volterra-DGL

$x(t)$  wir mit  $x$  und  $y(t)$  mit  $y$  abgekürzt:

1. Division durch  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-sx\Delta t}{\Delta t} + \frac{\alpha\gamma xy\Delta t}{\Delta t} = -sx + \alpha\gamma xy$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{ry\Delta t}{\Delta t} + \frac{\alpha\beta xy\Delta t}{\Delta t} = ry - \alpha\beta xy$$

2. Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'$$

daraus bekommen wir das nicht lineare System:

$$\begin{cases} x' = -sx + \alpha\gamma xy \\ y' = ry - \alpha\beta xy \end{cases}$$

# Lösungskurven im Lotka-Volterra-Modell

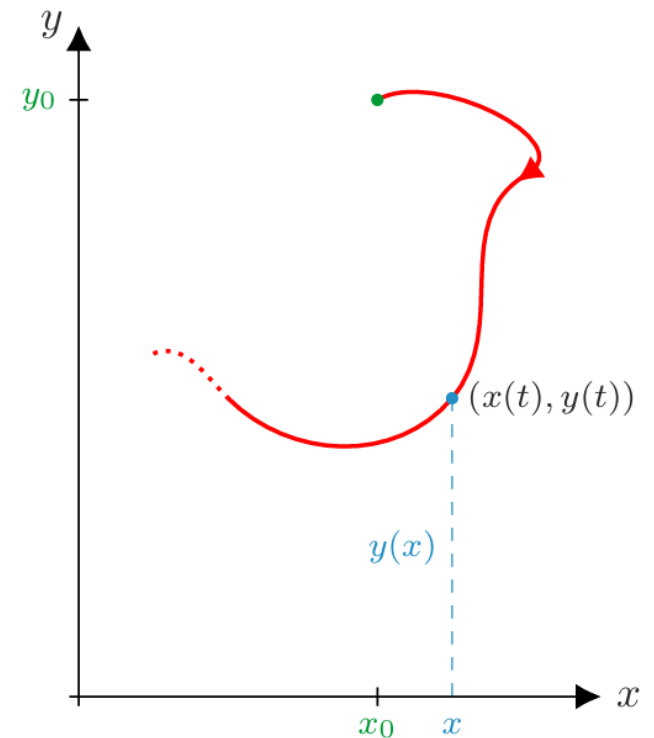
- Wie bestimmt die Zahl der Räuber  $x$  die Zahl der Beute  $y$ ?
  - lokale Lösungskurven als Graph einer Funktion  $x \rightarrow y(x)$  in der  $(x,y)$ -Ebene
  - Schauen uns einen eingeschränkten Bereich an, da die Kurve sich nicht als Graph einer Funktion realisieren lässt
  - Gesuchte Funktion: Lösung einer DGL  $y' = F(x,y)$

→ Zwei Arten zum Herleiten

Hierfür vereinfachen wir das nichtlineare System mit

$$r = s = \alpha\beta = \alpha\gamma = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix} \quad (5.2)$$



# Geometrische Herleitung im Vektorfeld

- die rechte Seite des Systems liefert uns den Vektorraum:

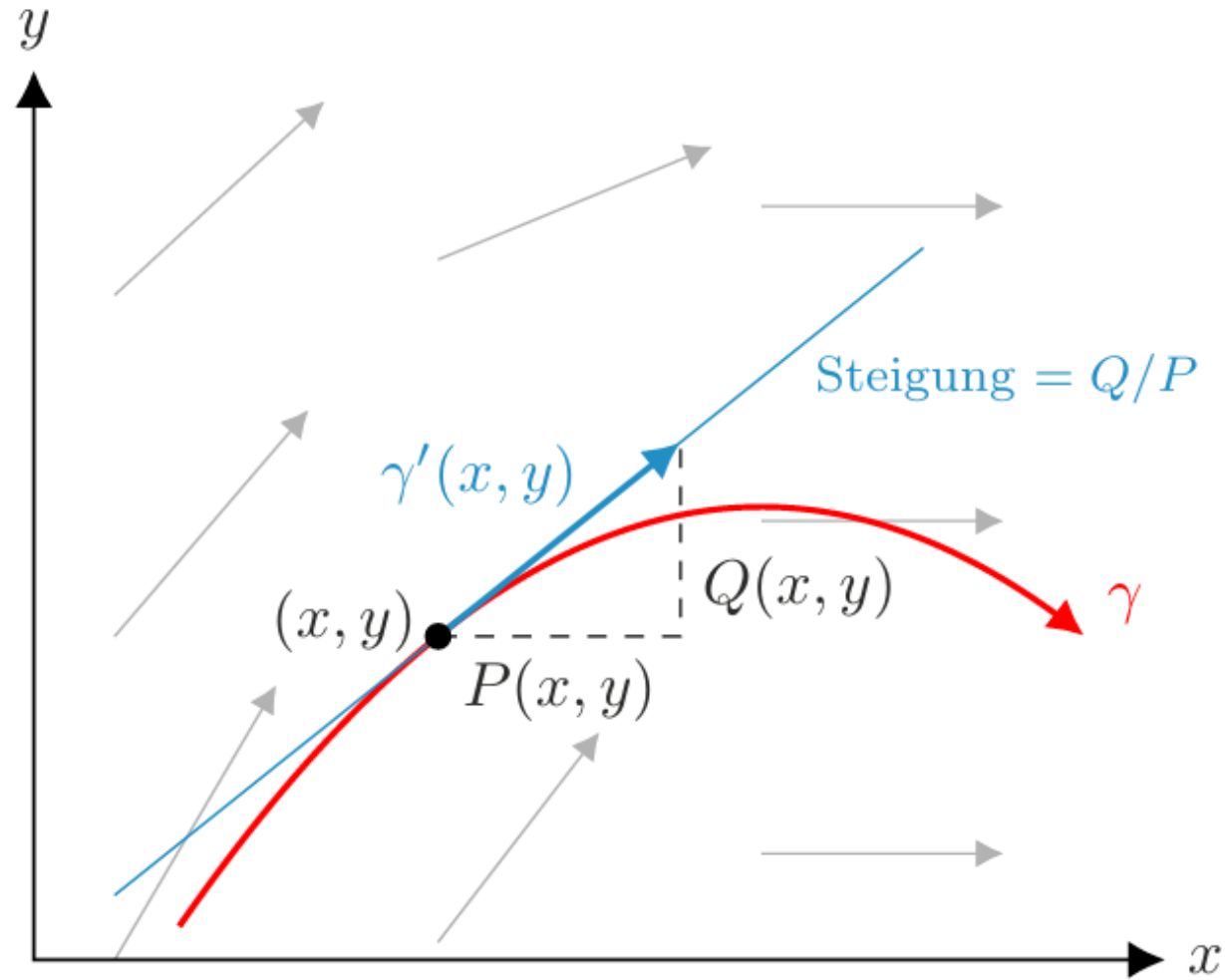
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

wobei an jedem Punkt  $(x, y)$  der Vektor tangential an der Kurve ist

- ist  $\gamma$  Graph einer Funktion  $x \rightarrow y(x)$

$\Rightarrow$  Tangente in jedem Punkt  $(x, y)$  auf  $\gamma$  die Steigung  $y'(x)$  (mit Steigungsdreieck)

$$y'(x) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{-x + xy}{y - xy} = F(x, y) \quad (\text{LV})$$



**Abb. 5.6** Tangentensteigung einer Lösung gegeben durch das Vektorfeld

# Analytische Herleitung

Gegeben:  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix}$ . Mit  $t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  der Parametrisierung von  $x \mapsto \gamma$

wir setzen  $y = \gamma(x)$  für die zweite Zeile des DGL (5.2) ein

$$y' = y - xy = \gamma'(x) = \gamma(x)x' = \gamma(x)(-x + xy)$$

|  $(-x + xy)$  ist die erste Zeile des DGL

Sei  $y = \gamma(x) = \gamma$

$$y'(-x + xy) = y - xy \quad | : (-x + xy)$$

$$y' = \frac{y-xy}{-x+xy} = -\frac{y(1-x)}{x(1-y)} = \frac{dy}{dx}$$

# Lösen der DGL

Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)dx = \left(\frac{1}{y}-1\right)dy$$

Integrieren wir beide Seiten:

$$\ln(x)-x+C = -\ln(y)+y$$

Umgestellt:

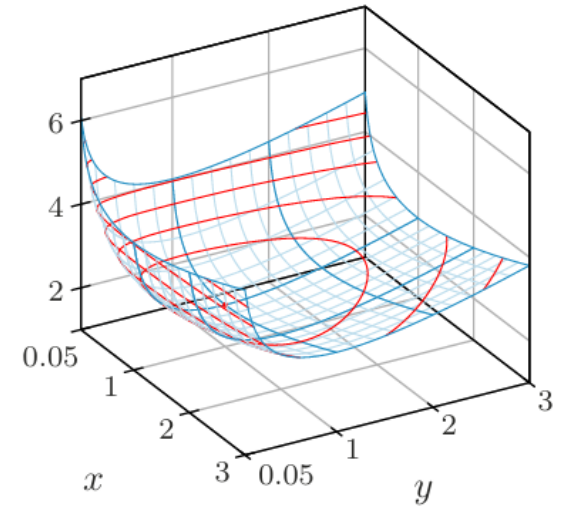
$$C = x+y-\ln(xy)$$

Diese Gleichung definiert eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

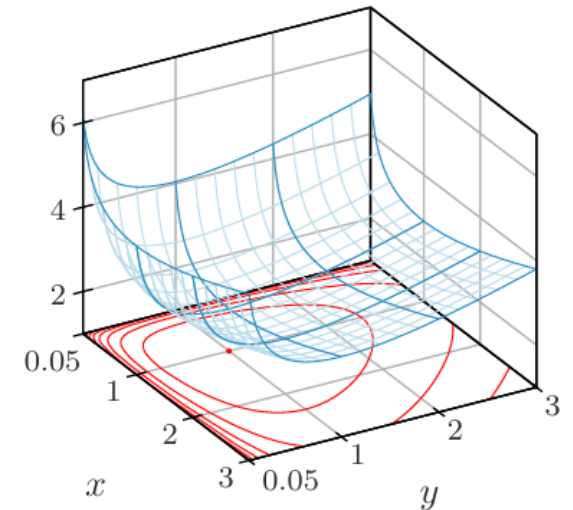
Höhenkurven ergeben sich durch  $\{(x,y) \mid f(x,y) = x+y-\ln(xy) = C\}$

Graph von  $f$  ist eine Talsenke

→ jede Höhenkurve zum Niveau  $C$  ist eine geschlossene Kurve



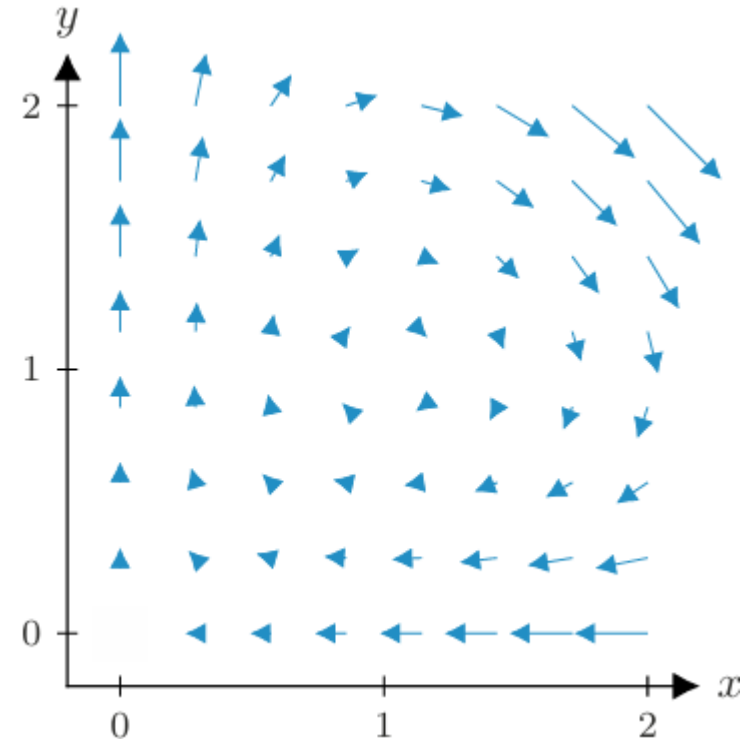
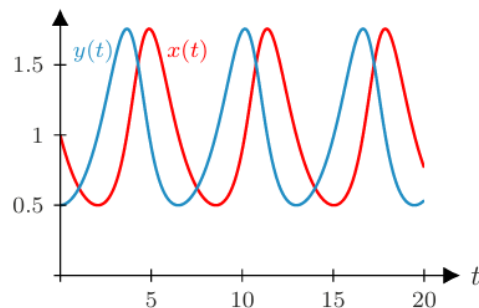
Funktionsgraph mit Höhenkurven



Höhenkurven in der  $(x,y)$ -Ebene

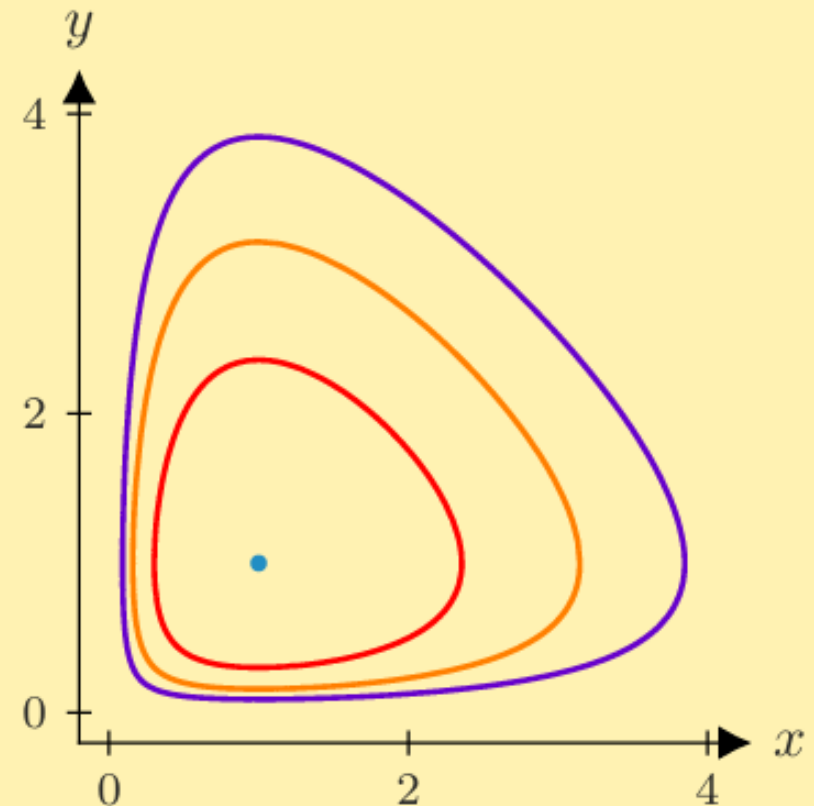
# Periodizität der Lösungskurven

- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix}$
- Der Verlauf zeigt periodisches Verhalten einer Lösungskurve
- Punkt  $(x(t), y(t))$  der Lösung auf den geschlossenen Höhenkurven im Uhrzeigersinn herum wandert
- Bestätigt die numerischen Lösungen
  - $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto y(t)$



# Zusammenfassung bisheriger Funde

- Die Lösungen des Lotka-Volterra DGL-Systems  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + xy \\ y - xy \end{pmatrix}$  sind periodisch.
- Die Räuber können die Beute nicht ausrotten. Ebenso wenig sterben die Räuber aus.
- Einziger Gleichgewichtspunkt  $\neq (0, 0)$  des Systems ist  $(x_\infty, y_\infty) = (1, 1)$ .
- Die Gleichung  $C = x + y - \ln(xy)$  bestimmt die Beziehung zwischen Räuber und Beute. Die Anfangswerte  $(x(0), y(0))$  legen jeweils die Konstante  $C$  fest.



# Linearisierung in zwei Dimensionen

## Definition 5.2.1

Ein zweidimensionales nichtlineares DGL-System  $y' = F(y)$  besteht aus einem Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1(y_1, y_2) \\ F_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$  und einer unbekanntem und daher gesuchten Funktion  $t \mapsto y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ . Dabei sind  $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen.

# Stationäre Lösungen eines Systems $y' = F(y)$

- $y_\infty$  ist eine stationäre Lösung wenn  $y'_\infty = 0$  bzw.  $F(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Unterscheiden dabei die (In-)Stabilität von  $y_\infty$  in 2 Fällen:
  - Stabiler Fall (Attraktor)
  - Instabiler Fall (Repellor)
- Versuchen tatsächliche Lösungen des Systems zu beschreiben durch Linearisierung von  $y' = F(y)$  bei stationären Lösung  $y_\infty$

## Lemma 5.2.2 (Zweidimensionale Taylor-Entwicklung)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Es gilt

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + \text{ThO.}$$

# Taylor-Entwicklung

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2 + h_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2 + h_2)}{\partial x_1} h_1 + ThO$$

2. Variable fest

$$f(x_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + ThO$$

1. Variable fest

$$\frac{\partial f(x_1, x_2 + h_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 + ThO$$

Taylor für  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$

Einsetzen und ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) &= f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + ThO + \left( \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 + ThO \right) h_1 + ThO \\ &\left( \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 \text{ wird unter } ThO \text{ zusammengefasst} \right) \\ &= f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} h_1 + ThO \end{aligned}$$

# Linearisierung in zwei Variablen

- Sei  $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$  eine stationäre Lösung also  $F(y_\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Wir setzen  $y(t) = y_\infty + h(t)$  wobei  $h(t)$  eine kleine Störung  $h(t) \ll 1$  ist  
 $y' = (y_\infty + h(t))' = y_\infty' + h' = F(y_\infty + h)$  mit  $y_\infty' = 0$
- Wenden für  $F(y_\infty + h)$  Taylor an

$$h' = F(y_\infty + h) = \begin{pmatrix} F_1(y_{\infty,1} + h_1, y_{\infty,2} + h_2) \\ F_2(y_{\infty,1} + h_1, y_{\infty,2} + h_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \\ F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + ThO$$

Wobei  $\begin{pmatrix} F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \\ F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2}) \end{pmatrix} = 0$  und  $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \end{pmatrix} = DF(y_\infty)$  ist

# Linearisierung in zwei Variablen

- Für  $\mathbf{h}$  ergibt sich das homogenes lineares DGL-System  $\mathbf{h}' = \mathbf{DF}(y_\infty) \mathbf{h}$
- Wie in 3.6 gelöst:  $\mathbf{h}(t) = e^{\mathbf{DF}(y_\infty)t} \mathbf{h}_0$  mit  $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}(0)$
- In den Ansatz  $y = y_\infty + \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathbf{h} = y - y_\infty$  einsetzen

$$\mathbf{h}(t) = e^{\mathbf{DF}(y_\infty)t} \mathbf{h}_0$$

$$\Rightarrow y - y_\infty = e^{\mathbf{DF}(y_\infty)t} \mathbf{h}_0$$

$$\Rightarrow y = y_\infty + e^{\mathbf{DF}(y_\infty)t} \mathbf{h}_0$$

- Da  $\mathbf{h}' = \mathbf{y}'$  wird aus dem System  $\mathbf{h}' = \mathbf{DF}(y_\infty) \mathbf{h}$  die linearisierte Gleichung:  
 $\mathbf{y}' = \mathbf{DF}(y_\infty)(y - y_\infty)$  mit der Lösung  $y_\infty + e^{\mathbf{DF}(y_\infty)t} \mathbf{h}_0$

Sei  $y' = F(y)$  ein nichtlineares DGL-System mit Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  
Um eine Lösung  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  zu approximieren, können wir wie folgt vorgehen:

1. Berechne allfällige stationäre Lösungen  $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$ .

2. Berechne allenfalls  $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ .

3. Setze jeweils  $y_\infty$  in

$$DF(y_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2(y_{\infty,1}, y_{\infty,2})}{\partial y_2} \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

ein.

4. Das zugehörige lineare System liefert eine Näherungslösung für  $y(0) = y_0$

$$y(t) = y_\infty + e^{DF(y_\infty) \cdot t} (y_0 - y_\infty).$$

Dieses Vorgehen lässt sich auch für  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  anwenden.

# Wann beschreibt die Linearisierung die gesuchte Lösung?

- mit Linearisierung von einem nichtlinearem Gleichungssystem auf ein lineares System führen
- Aber: was sagt die Approximation über die echte Lösung aus?

## Satz 5.2.3 (Hartman-Grobman<sup>a</sup>(1959/60))

Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Vektorfeld mit Fixpunkt  $y_\infty = \begin{pmatrix} y_{\infty,1} \\ y_{\infty,2} \end{pmatrix}$  und Jacobi-Matrix  $DF(y_\infty)$ . Falls jeder **Eigenwert** von  $DF(y_\infty)$  den **Realteil  $\neq 0$**  hat, so approximiert die Lösung des **linearisierten Systems** die wahre Lösung der nicht linearen Gleichung  $y' = F(y)$  in der **Nähe von  $y_\infty$** .

Der Satz gilt auch für  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>a</sup>Nach P. Hartman (1915 – 2015) und D. Grobman

# Wie hängt die Stabilität mit Eigenwerten zusammen?

Die Linearisierung  $h' = DF(y_\infty)h$  ist eine gewöhnliche lineare DGL

Die exakte Lösung lautet:

$$h(t) = e^{DF(y_\infty)t} h_0$$

Die Matrix-Exponentialfunktion entwickelt man am besten in Eigenrichtungen

→ Eigenvektoren  $v$  zu Eigenwerten  $\lambda$  liefert den Lösungsteil:  $e^{\lambda t} \cdot v$

→ das heißt der Realteil von  $\lambda$  bestimmt das Wachstumsverhalten

Es gilt für  $Re \lambda < 0$  gilt  $e^{\lambda t} \rightarrow 0$  und für  $Re \lambda > 0$  gilt  $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$

Für komplexe Eigenwerte gilt:  $e^{(\mu+i\omega)t} = e^{\mu t} \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$

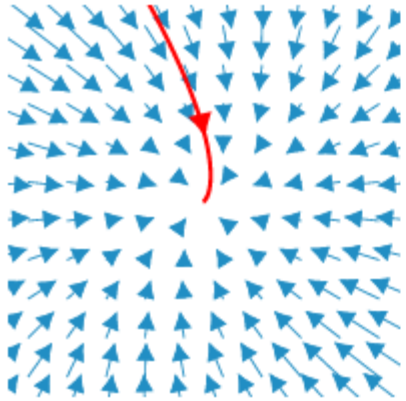
Dabei ergeben  $\cos(\omega t)$  und  $\sin(\omega t)$  eine Kreisbewegung, bzw. eine reine Rotation und  $e^{\mu t}$  skaliert den Radius des Kreises mit der Zeit, sodass eine Spirale entsteht

Somit gilt bei

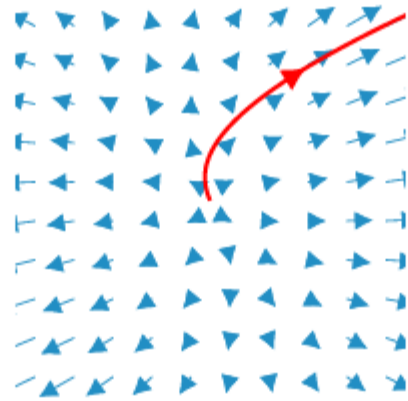
$\mu < 0$  wird der Radius immer kleiner, dh, Spirale nach innen

$\mu > 0$  wird der Radius immer größer, dh. Spirale nach außen

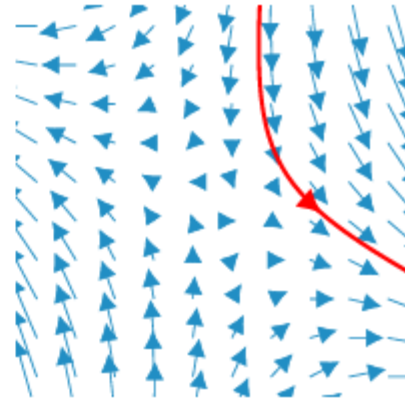
$\mu = 0$  Radius bleibt gleich und es entsteht eine geschlossene Kreisbahn



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ :  
"stabil"



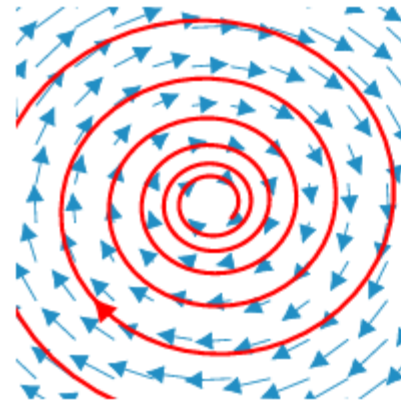
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$   
"instabil"



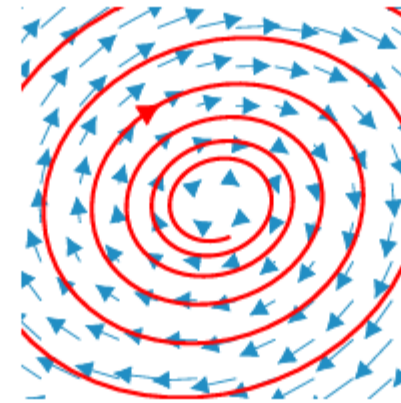
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$   
"Sattelpunkt"

Für reelle Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der Matrix  $A$  unterscheiden wir die drei Fälle

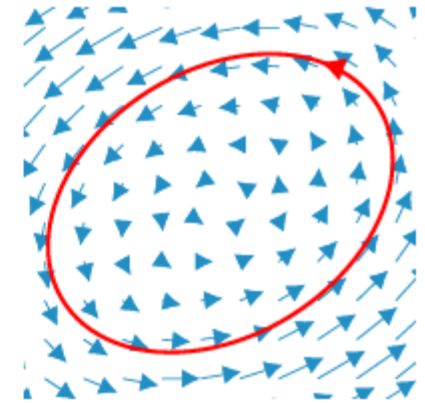
Für komplexe EW  $\lambda_1, \lambda_2$  mit  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$  haben wir auch drei Fälle



negativer Realteil:  
"stabil"



positiver Realteil:  
"instabil"



rein imaginär:  
"Zentrum"

# Fazit

- Das Vorgehen, um die Gleichung  $y' = F(y)$  approximativ zu lösen, schließen wir also dadurch ab, dass wir die EW der Jacobi-Matrix in einem Fixpunkt berechnen und schauen, welcher Fall oben zutrifft. Falls ein Zentrum gegeben ist, lässt sich der Satz 5.2.3 von Hartman-Grobman nicht anwenden.

**Vielen Dank fürs Zuhören!**