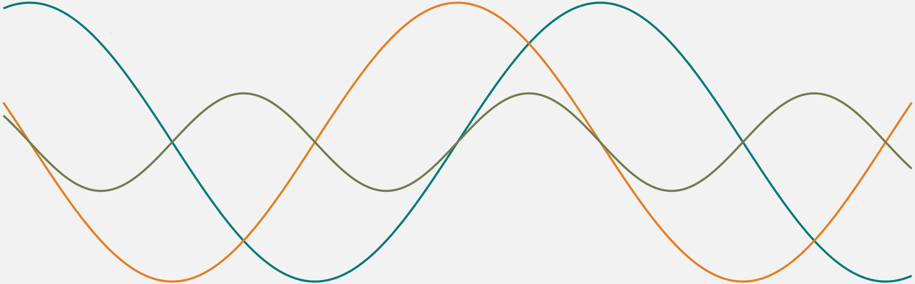


Fourierreihen

Maximilian Stefan

Seminarvortrag

20. Januar 2026

Überblick

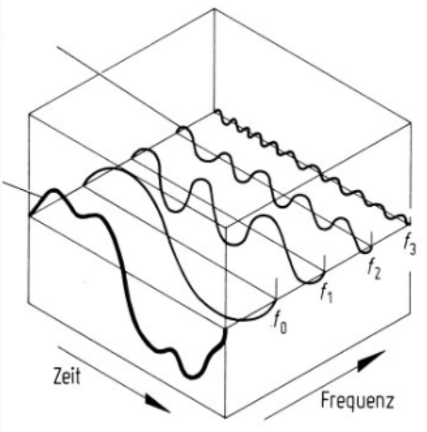
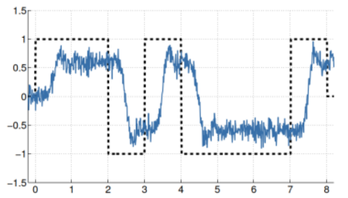


Abbildung 1: Fourierreihe

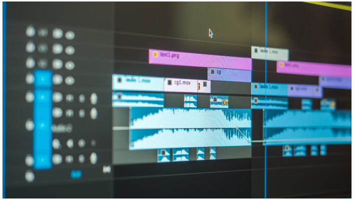
Einstieg

Motivation: Was können Fourier-Reihen?

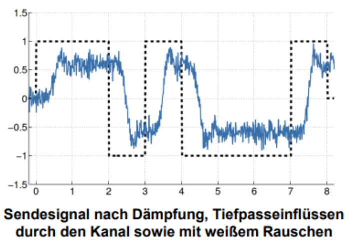
- Signale in der Technik und Physik $\rightarrow$ digitale Musik erzeugen

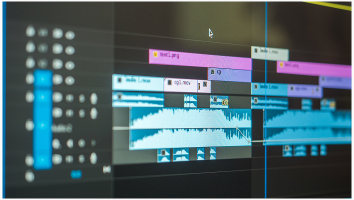


Sendesignal nach Dämpfung, Tiefpasseinflüssen durch den Kanal sowie mit weißem Rauschen

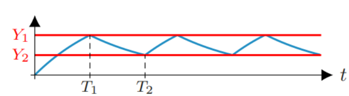


- Signale in der Technik und Physik $\to$ digitale Musik erzeugen

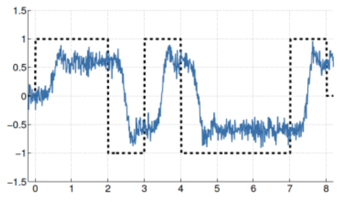




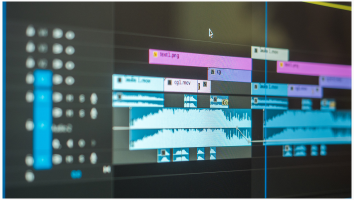
- Periodische Prozesse in Natur, Technik und Medizin



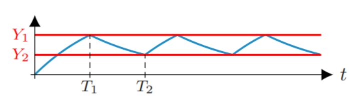
- Signale in der Technik und Physik $\rightarrow$ digitale Musik erzeugen



Sendesignal nach Dämpfung, Tiefpasseinflüssen durch den Kanal sowie mit weißem Rauschen



- Periodische Prozesse in Natur, Technik und Medizin



- Mathematischer Nutzen: Differenzialgleichungen lösen

Einstieg:
Was sind Fourierreihen?

Was sind Fourierreihen - Historischer Hintergrund

- Fourierreihen wurden erfunden von Joseph Fourier im Jahre 1822.

Was sind Fourierreihen - Historischer Hintergrund

- ~~Fourierreihen wurden erfunden von Josehp Fourier im Jahre 1822.~~

Was sind Fourierreihen - Historischer Hintergrund

- ~~Fourierreihen wurden erfunden von Josehp Fourier im Jahre 1822.~~
- Bereits im 18ten Jahrhundert kannten Mathematiker wie Euler, Lagrange oder die Bernoullis Fourierreihen für einige Funktionen.

Was sind Fourierreihen - Historischer Hintergrund

- ~~Fourierreihen wurden erfunden von Josehp Fourier im Jahre 1822.~~
- Bereits im 18ten Jahrhundert kannten Mathematiker wie Euler, Lagrange oder die Bernoullis Fourierreihen für einige Funktionen.
- 1822 stellte Fourier in seinem Werk *Théorie analytique de la chaleur (Analytische Theorie der Wärme)* die Vermutung auf, dass es für <u>alle Funktionen</u> ein solche Reihenentwicklungen gäbe.

Was sind Fourierreihen - Historischer Hintergrund

- ~~Fourierreihen wurden erfunden von Josehp Fourier im Jahre 1822.~~
- Bereits im 18ten Jahrhundert kannten Mathematiker wie Euler, Lagrange oder die Bernoullis Fourierreihen für einige Funktionen.
- 1822 stellte Fourier in seinem Werk *Théorie analytique de la chaleur (Analytische Theorie der Wärme)* die Vermutung auf, dass es für <u>alle Funktionen</u> ein solche Reihenentwicklungen gäbe.
- Die Korrektheit dieser Vermutung wird in diesem Vortrag diskutiert.

Was sind Fourierreihen - Mathematische Definitionen

Was: Fourrierreihen sind mathematische Reihen aus trigonometrischen Funktionen.

Was sind Fourierreihen - Mathematische Definitionen

Was: Fourrierreihen sind mathematische Reihen aus trigonometrischen Funktionen.

Ziel: Ziel einer Fourierreihe ist es eine **periodische Funktion** f zu approximieren.

Was sind Fourierreihen - Mathematische Definitionen

Was: Fourrierreihen sind mathematische Reihen aus trigonometrischen Funktionen.

Ziel: Ziel einer Fourierreihe ist es eine **periodische Funktion** f zu approximieren.

Definition 4.1.1 Periodische Funktion

Sei $P > 0, P \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + P) = f(x)$
dann heißt f **periodisch** mit Periode P. Die kleinste Periode T heißt **Hauptperiode**.

Was sind Fourierreihen - Mathematische Definitionen

Was: Fourrierreihen sind mathematische Reihen aus trigonometrischen Funktionen.

Ziel: Ziel einer Fourierreihe ist es eine **periodische Funktion** f zu approximieren.

Definition 4.1.1 Periodische Funktion

Sei $P > 0, P \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(x + P) = f(x)$ dann heißt f **periodisch** mit Periode P. Die kleinste Periode T heißt **Hauptperiode**.

Definition Fouriers Vermutung

Sei f eine **beliebige** periodische[a] Funktion mit Periode 2π. Dann können wir diese schreiben als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k cos\left(kx\right) + b_k sin\left(kx\right) \right)$$

[a] Fourier sprach von einer beliebigen Funktion, aber das Buch beschränkt sich auf periodische Funktionen.

Definition Taylorreihen

Sei $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathcal{D}_f$ ein Punkt für den $f(x_0)$ bekannt ist. So lässt sich f beschreiben als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Definition Taylorreihen

Sei $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathcal{D}_f$ ein Punkt für den $f(x_0)$ bekannt ist. So lässt sich f beschreiben als

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

Taylorreihe

- Besteht aus Polynomen
- Konvergiert lokal
- Vorraussetzung: f *glatt*

Fourierreihe

- Besteht aus Sinus- und Cosinus-Funtkionen
- Konvergenz: ?
- Vorraussetzung: f *periodisch* und ?

Beweis

Sei f eine Funktion mit einer beliebigen Periode T, also sei $f(x+T) = f(x)$.
Sei $g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$. Dann sieht man:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right)$$

Da f die Periode T hat, ist weiter $f(\frac{Tx}{2\pi} + T) = f(\frac{Tx}{2\pi}) = g(x)$.
Deshalb kann man im Folgenden für jedes f ein $\tilde{f}$ mit der Periode 2π finden.

Trigonometrische Polynome

Definition Trigonometrische Polynome - Definition

Ist $N \in \mathbb{N}$, so heißt die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k cos\left(kx\right) + b_k \sin\left(kx\right)\right)$$

trigonometrisches Polynom vom Grad N. Für $N = \infty$ erhalten wir eine **Fourierreihe**, auch genannt *trigonometrische Reihe*:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(kx\right) + b_k \sin\left(kx\right)\right)$$

Trigonometrische Polynome - Beispiele: Trigonometrische Identitäten

Beispiele von einfachen trigonometrischen Polynomen mit endlichen N

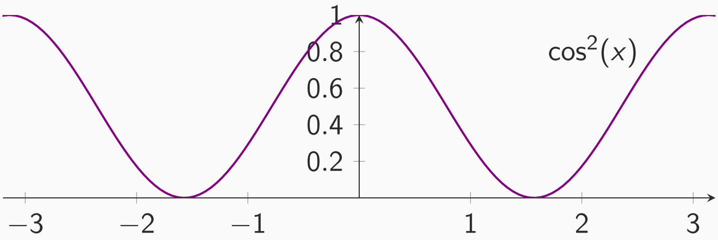
$$
\begin{aligned}
\cos^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\
\sin^3 &= \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) \\
(\cos^2\sin^3)(x) &= \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x) \\
(\cos^3\sin^2)(x) &= \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Polynome: Visualisierungen der Genese

Beispiele von einfachen trigonometrischen Polynomen mit endlichen N

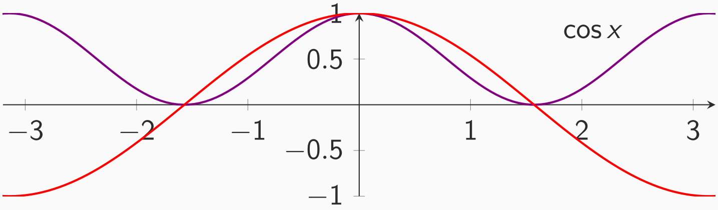
$$\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^3 = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$
$$(\cos^2 \sin^3)(x) = \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x)$$
$$(\cos^3 \sin^2)(x) = \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)$$

Genese von $\cos^2 x$

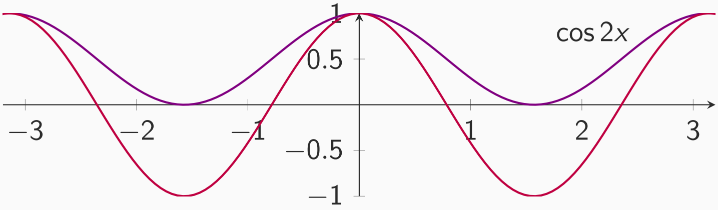


1. Zielfunktion $\cos^2(x)$

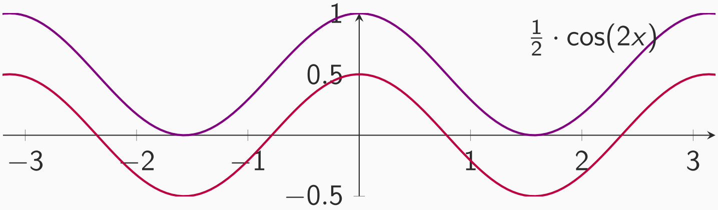
Genese von $\cos^2 x$



1. Zielfunktion $\cos^2(x)$
2. Start mit Cosinus: $\cos(x)$

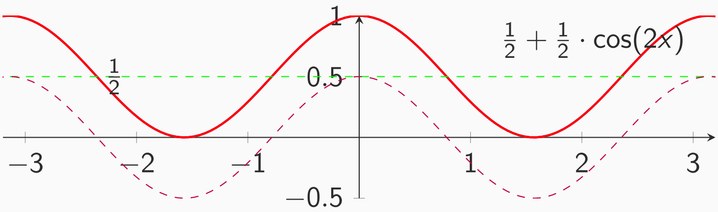


1. Zielfunktion $\cos^2(x)$
2. Start mit Cosinus: $\cos(x)$
3. Frequenz erhöhen: $\cos(2x)$



1. Zielfunktion $\cos^2(x)$
2. Start mit Cosinus: $\cos(x)$
3. Frequenz erhöhen: $\cos(2x)$
4. Amplitude halbieren: $\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

Genese von $\cos^2 x$



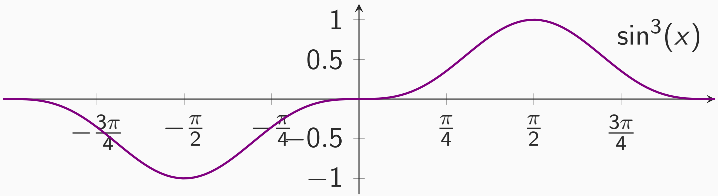
1. Zielfunktion $\cos^2(x)$
2. Start mit Cosinus: $\cos(x)$
3. Frequenz erhöhen: $\cos(2x)$
4. Amplitude halbieren: $\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$
5. Nach oben Schieben: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

Trigonometrische Polynome - Beispiele: Trigonometrische Identitäten

Beispiele von einfachen trigonometrischen Polynomen mit endlichen N

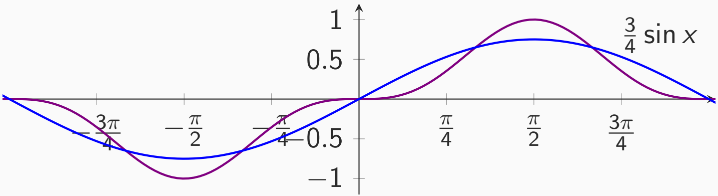
$$\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$\sin^3 = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$
$$(\cos^2\sin^3)(x) = \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x)$$
$$(\cos^3\sin^2)(x) = \frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{16}\cos(3x) - \frac{1}{16}\cos(5x)$$

Genese von $\sin^3 x$



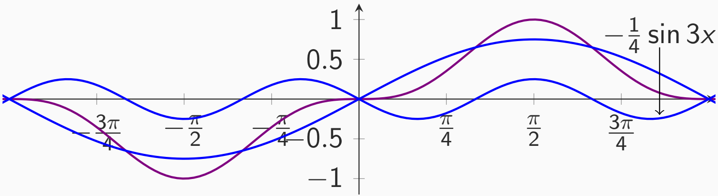
1. Kompliziertere Funktion $\sin^3(x)$

Genese von $\sin^3 x$



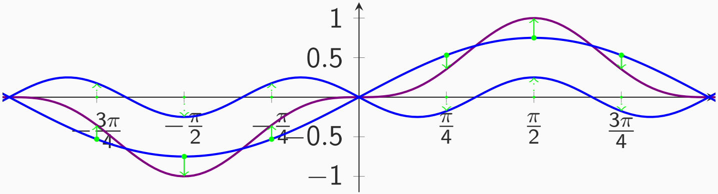
1. Kompliziertere Funktion $\sin^3(x)$
2. Wir starten mit $\frac{3}{4}\sin(x)$

Genese von $\sin^3 x$



1. Kompliziertere Funktion $\sin^3(x)$
2. Wir starten mit $\frac{3}{4}\sin(x)$
3. Addieren die Funktion $-\frac{1}{4}\sin(3x)$ auf.

Genese von $\sin^3 x$



1. Kompliziertere Funktion $\sin^3(x)$
2. Wir starten mit $\frac{3}{4}\sin(x)$
3. Addieren die Funktion $-\frac{1}{4}\sin(3x)$ auf.
4. Die punktuelle Addition zeigt das Entstehen von Gleichheit.

Trigonometrische Polynome: Besipielbeweis

Trigonometrische Polynome - Eulersche Formel

Beweis $\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Beweis $\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Tylorreihen für $\cos$, $\sin$ **und** e^{ix}

Cosinus: $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

Sinus: $$i\sin(x) = ix - \frac{ix}{1} + \frac{ix^3}{3!} - \frac{ix^5}{5!} + \frac{ix^7}{7!} \dots$$

Formel von Euler: $$e^{ix} = 1 - \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \cos(x) + i\sin(x)$$

Beweis $\cos^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Tylorreihen für $\cos$, $\sin$ **und** e^{ix}

Cosinus: $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

Sinus: $$i\sin(x) = ix - \frac{ix}{1} + \frac{ix^3}{3!} - \frac{ix^5}{5!} + \frac{ix^7}{7!} \dots$$

Formel von Euler: $$e^{ix} = 1 - \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \cos(x) + i\sin(x)$$

Es ergeben sich folgende Formeln:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ und } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\cos^2$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Trigonometrische Polynome - Beispielrechnung

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\cos^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2$$

Eulersche Formel

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\cos^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2 \qquad \textit{Eulersche Formel}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{ix}\right)^2 + 2e^{ix} \cdot -e^{-ix} + \left(\left(e^{-ix}\right)^2\right) \qquad \textit{2te Binomische Formel}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$\cos^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2 \qquad \textit{Eulersche Formel}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{ix}\right)^2 + 2e^{ix} \cdot -e^{-ix} + \left(\left(e^{-ix}\right)^2\right) \qquad \textit{2te Binomische Formel}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 + e^{i2x} + e^{-i2x}\right) \qquad \textit{Kürzen}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$
\begin{aligned}
\cos^2 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2 && \textit{Eulersche Formel} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(e^{ix}\right)^2 + 2e^{ix} \cdot -e^{-ix} + \left(\left(e^{-ix}\right)^2\right) && \textit{2te Binomische Formel} \\
&= \frac{1}{4}\left(2 + e^{i2x} + e^{-i2x}\right) && \textit{Kürzen} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) && \textit{Ausklammern} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Polynome - Beispielrechnung

Beweis $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$$
\begin{aligned}
\cos^2 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^2 && \textit{Eulersche Formel} \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(e^{ix}\right)^2 + 2e^{ix} \cdot -e^{-ix} + \left(\left(e^{-ix}\right)^2\right) && \textit{2te Binomische Formel} \\
&= \frac{1}{4}\left(2 + e^{i2x} + e^{-i2x}\right) && \textit{Kürzen} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right) && \textit{Ausklammern} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) && \textit{Trigonometrisches Polynom} \blacksquare
\end{aligned}
$$

Trigonometrische Polynome:
Fragen an die Trigonometrischen Polynome

Fragen an die Trigonometrischen Polynome:

Trigonometrisches Polynom

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(kx\right) + b_k \sin\left(kx\right)\right)$

1. Wie findet man Koeffizienten a_o, a_k, b_k?
2. Kann jede Funktion f dargestellt werden?

Der Vektorraum

Definition Untervektorraum T_N

Sei $C^0([-\pi,\pi])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$. Sei $T_N \subset C^0([-\pi,\pi])$ der von den Funktionen c_n, s_m aufgespannte Untervektorraum mit $n \geq 0, m > 0$, und $n, m < N$. Außerdem seien die aufspannenden Funktionen:

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

Wir betrachten also den Vektorraum:

$$T_N = \{c_0, c_1, \cdots, c_N, s_1, \cdots, s_N\}$$

1. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome:

Falls $f \in T_N$, ist f eine Linarkombination der Vektoren c_n und s_n. Es gibt also Zahlen α_n und β_n mit

$$f(x) =$$

1. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome:

Falls $f \in T_N$, ist f eine Linarkombination der Vektoren c_n und s_n. Es gibt also Zahlen α_n und β_n mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n c_n + \sum_{m=1}^{N} b_m s_m =$$

1. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome:

Falls $f \in T_N$, ist f eine Linarkombination der Vektoren c_n und s_n. Es gibt also Zahlen α_n und β_n mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n c_n + \sum_{m=1}^{N} b_m s_m = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right).$$

1. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome:

Falls $f \in T_N$, ist f eine Linarkombination der Vektoren c_n und s_n. Es gibt also Zahlen α_n und β_n mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n c_n + \sum_{m=1}^{N} b_m s_m = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\right).$$

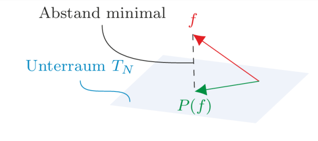
Wie findet man diese sogenannten *Fourier-Koeffizienten*?

2. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome

Wenn $f \notin T_N$. Welche Funktion ist dann die beste Approximation für f?

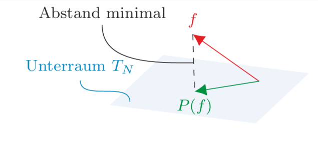
2. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome

Wenn $f \notin T_N$. Welche Funktion ist dann die beste Approximation für f?
Hierfür suchen wir die orthogonale Projektion $P(f)$ auf den Untervektorraum T_N.
Dadurch wird der Abstand zu f minimal und $P(f)$ ist die beste Approximation.



2. Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome

Wenn $f \notin T_N$. Welche Funktion ist dann die beste Approximation für f?
Hierfür suchen wir die orthogonale Projektion $P(f)$ auf den Untervektorraum T_N.
Dadurch wird der Abstand zu f minimal und $P(f)$ ist die beste Approximation.



3. Frage an den Vektorraum: Fouriers Vermutung

Konvergiert der Abstand von $|P(f) - f|$ gegen 0, wenn $N \to \infty$ für *jede* Funktion f?

Frage an den Vektorraum der Trigonometrischen Polynome: Zusammenfassung

1. Wie finden wir geeignete Koeffizienten?
2. Welche Funktion ist die beste Approximation für f?

$\rightarrow$ Wir brauchen einen *Orthogonalitätsbegriff*.

3. Können wir jede Funktion f durch eine Fouruierreihe darstellen?

$\rightarrow$ Wir brauchen einen *Abstandsbegriff*.

Der Vektorraum: Skalarprodukt

Def. Skalarprodukt

Sei V ein reeller Vektorraum.

1. Ein **Skalarprodukt** wird ordnet zwei Vektoren $x, y \in V$ eine Zahl zu. Es ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ und erfpllt dabei drei Regeln:
   i **Symmetrie:** $\forall x, y \in V : \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
   ii **Biliniarität:**
      - $\forall x, y, z \in V : \langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
      - $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R} : \langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

   iii **Postive Definitheit:** $\forall x \in V : \langle x, x\rangle \geq 0$ und nur $\langle x, x\rangle = 0$, wenn $x = 0$.
2. Ein reeller Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt auch **euklidischer** Vektorraum $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Skalarprodukt der Fourierreihe

Im Vektorraum der stetigen Funktionen C^0 ist das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)dx$.

Skalarprodukt der Fourierreihe

Im Vektorraum der stetigen Funktionen C^0 ist das Skalarprodukt
$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)dx$.
Auf dem eingeschränkten Raum $C^0([-\pi, \pi])$ gilt also das Skalarprodukt
$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Skalarprodukt der Fourierreihe

Im Vektorraum der stetigen Funktionen C^0 ist das Skalarprodukt
$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)dx$.
Auf dem eingeschränkten Raum $C^0([-\pi, \pi])$ gilt also das Skalarprodukt
$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Beweis Beweis Skalarprodukt

i $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \langle g, f\rangle$

ii.a $\langle f, g + h\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(g(x) + h(x))dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)h(x)dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$

ii.b $\langle f, \alpha g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\alpha g(x)dx = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \alpha\langle f, g\rangle$

iii $\langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx =: \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$,
$g(x) > 0 \forall x \Rightarrow \langle g, g\rangle = 0 \Leftrightarrow g = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0, \langle f, f\rangle > 0$ sonst.

Orthogonalität

Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Man schreibt $x \perp y$.

Orthogonalität

Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Man schreibt $x \perp y$.

Definition Trigonometrische Orthogonalitäten

Sei $n, k \in \mathbb{N}$

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & n = k = 0, \\ \pi & n = k \neq 0, \\ 0 & n \neq k, \end{cases}$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & n = k = 0, \\ \pi & n = k \neq 0, \\ 0 & n \neq k, \end{cases}$$

3. $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

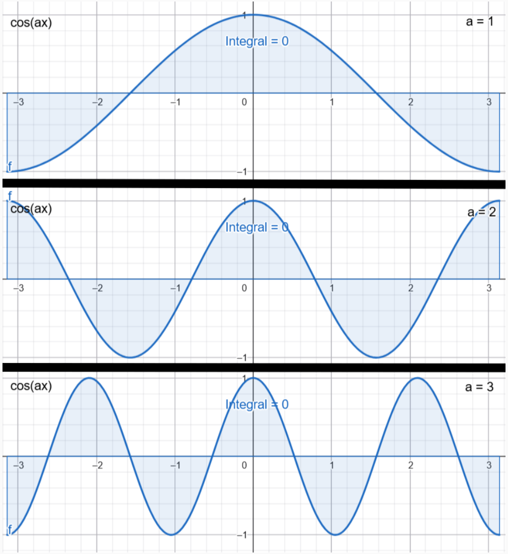
Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 1

$$\mathbf{1.} \langle c_0, c_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

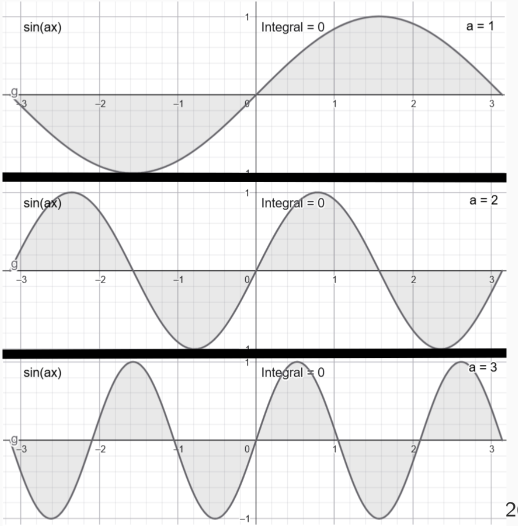
$$\mathbf{2.} \langle c_0, s_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx = 0$$

Beweisskizze durch Symmetrie

Cosinus:



Sinus:



Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

3. $\langle c_n, s_m \rangle =$ n, m **beliebig**

Orthogonalität der aufspannenden Vektoren 2

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$\textbf{3.}\langle c_n, s_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) dx \quad n, m \textbf{ beliebig} \qquad \textit{Def.}$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$\begin{aligned} \textbf{3.}\langle c_n, s_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx) dx \ \ n, m \textbf{ beliebig} && \textit{Def.} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx && \textit{Linearität} \end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3.}\langle c_n, s_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)dx \;\; n, m \textbf{ beliebig} && \textit{Def.}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx && \textit{Linearität}
\end{aligned}
$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$\begin{aligned}
\textbf{3.}\langle c_n, s_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)dx \;\; n, m \textbf{ beliebig} && \textit{Def.}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx && \textit{Linearität}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((m+n)x\Big) + \sin\Big((m-n)x\Big)}{2}dx && \textit{Additionstheorem}
\end{aligned}$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$\begin{aligned}
\textbf{3.}\langle c_n, s_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)dx \;\; n, m \textbf{ beliebig} && \textit{Def.} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx && \textit{Linearität} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((m+n)x\Big) + \sin\Big((m-n)x\Big)}{2}dx && \textit{Additionstheorem} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\Big((m+n)x\Big)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin\Big((m-n)x\Big)dx && \textit{Linearität}
\end{aligned}$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 2

$$
\begin{aligned}
\textbf{3.}\langle c_n, s_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)dx \ \ n, m \textbf{ beliebig} && \textit{Def.}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx && \textit{Linearität}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\Big((m+n)x\Big)+\sin\Big((m-n)x\Big)}{2}dx && \textit{Additionstheorem}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\Big((m+n)x\Big)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin\Big((m-n)x\Big)dx && \textit{Linearität}\\
&= 0 && \blacksquare\ \textit{Symmetrie des Sin.}
\end{aligned}
$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$\textbf{4.}\langle c_n, c_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) dx \qquad n, m \neq 0, n \neq m, \; Def.$$

Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$\mathbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) dx \qquad n, m \neq 0, n \neq m, \; Def.$$

Additionstheoreme 2

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(y-x) - \cos(y+x))$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(y+x) + \cos(y-x))$$

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$\begin{aligned} \mathbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)dx && n, m \neq 0, n \neq m, \; \mathit{Def.} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((m+n)x) + \cos((m-n))dx && \mathit{Additionstheoreme\ 2} \end{aligned}$$

Additionstheoreme 2

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(y-x) - \cos(y+x)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(y+x) + \cos(y-x)$$

Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$\textbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)dx \qquad n, m \neq 0, n \neq m,\ \textit{Def.}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos((m+n)x)dx + \cos((m-n))dx \qquad \textit{Additionstheoreme 2}$$

Analog für $\langle s_n, s_m\rangle$.

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx) dx && n, m \neq 0, n \neq m, \ \textit{Def.} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos((m+n)x)dx + \cos((m-n))dx && \textit{Additionstheoreme 2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx \Big) && \textit{Linearität}
\end{aligned}
$$

Analog für $\langle s_n, s_m\rangle$.

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$
\begin{aligned}
\mathbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)dx && n, m \neq 0, n \neq m,\ \mathit{Def.} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos((m+n)x)dx + \cos((m-n))dx && \mathit{Additionstheoreme\ 2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx\Big) && \mathit{Linearität} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ux)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(vx)dx\Big) && u, v \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}
$$

Analog für $\langle s_n, s_m\rangle$.

Beweis Orthogonalität der aufspannenden Vektoren - 3

$$
\begin{aligned}
\textbf{4.}\langle c_n, c_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)dx && n, m \neq 0, n \neq m,\ \textit{Def.}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos((m+n)x)dx + \cos((m-n))dx && \textit{Additionstheoreme 2}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx\right) && \textit{Linearität}\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ux)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(vx)dx\right) && u, v \in \mathbb{N}^+\\
&= 0 && \blacksquare\textit{Symmetrie des Cosinus}
\end{aligned}
$$

Analog für $\langle s_n, s_m\rangle$.

Der Vektorraum: Normierung

Norm, allgemeine Def.

Definition Norm

Eine Norm auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto ||v||$ mit den Eigenschaften

1. Für alle $v \in V : v \geq 0$ und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. Für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R} : ||\alpha v|| = |\alpha|\ ||v||$
3. Für alle $v, w \in V$ gilt die **Dreiecksungleichung** $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Ein Vektorraum V mit einer Norm $||\cdot||$ heißt **normierter** Vektorraum $(V, ||\cdot||)$

Induzierte Norm:

Sei V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein euklidischer Vektorraum.
Dann ist durch $||v|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ für $x \in V$eine Norm auf V definiert und diese heißt **induzierte Norm**.

Unsere induzierte Norm

Definition Norm für T_N

Die induzierte Norm ist also $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx}$

Aus der Algebra folgt nun:

1. **Parallelogramregel:** $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$
2. **Satz des Pythagoras:** $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$
3. **Cauchy-Schwarz-Ungleichung:** $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \; ||y||$
4. **Allgemeiner Winkelbegriff:** $\alpha = \arccos\left(\frac{|\langle x,y\rangle|}{||x|| \; ||y||}\right)$

   Cauchy-Schwarz: $\frac{|\langle x,y\rangle|}{||x|| \; ||y||} \leq 1 \Rightarrow \alpha : \cos(\alpha) = \frac{|\langle x,y\rangle|}{||x|| \; ||y||}$.
   Unter Betrachtung der Mehrdeutigkeit ist α der Winkel zwischen x und y.

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

1. $\langle c_0, c_0 \rangle$

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{1.} \langle c_0, c_0 \rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx}$$

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{1.} \langle c_0, c_0 \rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi}}$$

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{1.} \langle c_0, c_0 \rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi} - \frac{-\pi}{2\pi}}$$

Normierte Vektoren - 1

Info Vektoren des Verktorraums

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\textbf{1.} \langle c_0, c_0\rangle = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x}{2\pi}\right]_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\pi} - \frac{-\pi}{2\pi}} \qquad = 1\checkmark$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

2. $\langle c_n, c_n \rangle$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\textbf{2.}\langle c_n, c_n \rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{2.}\langle c_n, c_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{\cos(u)\sin(u)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1du\right)} \qquad \textit{Sub. u. Reduktionsformel}$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{2.}\langle c_n, c_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{\cos(u)\sin(u)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}1du\right)} \qquad \textit{Sub. u. Reduktionsformel}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\,\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\left[n\,x\right]_{-\pi}^{\pi}\right)} \qquad \textit{Re-Sub. u. Integrieren}$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{2.}\langle c_n, c_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{\cos(u)\sin(u)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1du\right)} \qquad \textit{Sub. u. Reduktionsformel}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[n\,x\right]_{-\pi}^{\pi}\right)} \qquad \textit{Re-Sub. u. Integrieren}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\pi}\left(0 + \frac{2n\pi}{2}\right)} \qquad \textit{Einsetzen}$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{2.}\langle c_n, c_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{\cos(u)\sin(u)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 d u\right)} \qquad \textit{Sub. u. Reduktionsformel}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\,\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[n\,x\right]_{-\pi}^{\pi}\right)} \qquad \textit{Re-Sub. u. Integrieren}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\,\pi}\left(\,0\; + \frac{2n\,\pi}{2}\right)} \qquad \textit{Einsetzen}$$

$$= \frac{2n\,\pi}{2n\,\pi}$$

Beweis Normen der aufspannenden Vektoren

$$\mathbf{2.}\langle c_n, c_n\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi^2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx} \qquad \textit{Def. u. Linearität}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left[\frac{\cos(u)\sin(u)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1du\right)} \qquad \textit{Sub. u. Reduktionsformel}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[nx\right]_{-\pi}^{\pi}\right)} \qquad \textit{Re-Sub. u. Integrieren}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n\pi}\left(0 + \frac{2n\pi}{2}\right)} \qquad \textit{Einsetzen}$$

$$= \frac{2n\pi}{2n\pi} = 1\checkmark \qquad \blacksquare \ (s_n analog)$$

Der Vektorraum: Orthonormalbasis

Definition 4.3.6

Eine Basis aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren (in einem endlichdimensionalen Vektorraum) heißt **Orthonormalbasis (ONB)**.

Definition 4.3.6

Eine Basis aus paarweise orthogonalen Einheitsvektoren (in einem endlichdimensionalen Vektorraum) heißt **Orthonormalbasis (ONB)**.

Die Vektoren c_0, c_n, s_m haben Länge 1 und sind paarweise orthogonal.

$\Rightarrow$ Die aufspannenden Vektoren von T_N bilden eine ONB.

Der Vektorraum:
Finden der Koordinaten

Übertragen auf Fourierreihen

Definition

Sei $B = \{e_1, ..., e_n\}$ eine ONB in einem euklidischen Vektorraum V . Für einen Vektor $v \in V$ ist die k-te Koordinate in der Basis B der Wert des Skalarprodukter $\langle v, e_k \rangle$ oder formal $v = \sum^n ni = 1\langle f, c_n \rangle c_n + um_{m=1}^n \langle f, s_m \rangle s_m \langle v, e_i \rangle e_i$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle f, c_n \rangle c_n + \sum_{m=1}^{N} \langle f, s_m \rangle s_m$$

$$= \underbrace{\langle f, c_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{gesuchtes } \frac{a_0}{2}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \langle f, c_n \rangle c_n}_{\text{gesuchtes } a_n} + \underbrace{\sum_{m=1}^{N} \langle f, s_m \rangle s_m}_{\text{gesuchtes } b_n}$$

Formeln für Koordinaten

Für $n = 0$ erhalten wir

$$\frac{a_0}{2} = \langle f, c_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

und für n bzw. $m \geq 1$:

$$a_n = \langle f, c_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_m = \langle f, s_m \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad \blacksquare$$

Der Vektorraum:
Beweis der Fouriervermutung

Abstand

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum V. Dann ist $||x - y||$ ein Maß für den Abstand zweier Vektoren x, y.

Definition 4.3.5

Sei (v_n) eine Folge im normierten Vektorraum V. Dann konvergiert die Folge gegen v_∞, falls $\lim_{n\to\infty} ||v_n - v_\infty|| = 0$, mit Schreibweise $\lim_{n\to\infty} = v_\infty$.

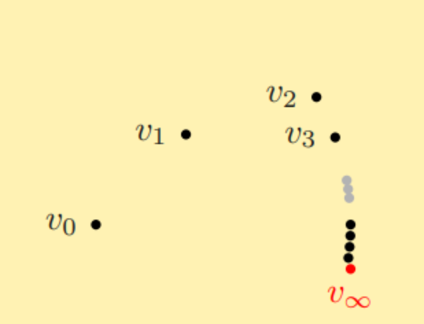


Abbildung 2: Visualisierung Konvergenz

Aufzeigen der Projektion

In einem Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ können wir eine Projektion suchen um die Annäherung mit dem geringsten Abstand zu finden.

Definition

1. Die Projektion von x auf einen Vektor $y \neq 0$ ist $P(x) = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y$.
2. Seien U ein Unterraum von V und $e_1, \ldots e_n$ eine ONB von U.

   Dann ist $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ die Projektion von $x \in V$ auf U.

   Vonn allen Vektoren in U hat die Projektion $P(x)$ den kleinsten Abstand von x.

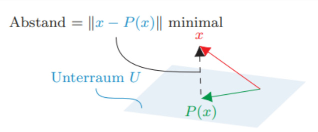


Abbildung 3: Projektion

Beweisidee: $x - P(x)$ ist orrhogonal zu jedem Einheitsvektor e_i.

T_N als Projektion

Die Projektion $P_N(f)$ einer Funktion $f \in V$ auf T_N ist

$$
\begin{aligned}
P_N &= \langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^{N} \Big(\langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k \Big) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k cos\,(kx) + b_k sin\,(kx))
\end{aligned}
$$

Die Projektion $P_N(f) \in T_N$ ist damit das Fourier-Polynom vom Grad N mit den Koeffizienten mit den eben errechneten Formeln.

T_N als Projektion

Für ein wachsendes N wird die Approximation durch $P_N(f)$ immer besser. Im **quadratischen Mittel** gilt:

$$\lim_{N\to\infty} ||f - P_N(f)||_{L^2}^2 = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - P_N(f)dx(x)\big)^2 = 0$$

Das bedeutet, wir können alle periodischen Funktionen $f \in C^0$ approximieren, sodass die Fourierreihe konvergiert. ■

Abbildung 4: Fourier approves[1]

[1] Erstellt mit KI

Der Vektorraum: Zusammenfassung

Zusammenfassung

Alle periodischen Funktionen f sind annäherbar mit quadratischem Mittel 0!
Man kann die Koeffizienten bestimmen mit den Formeln:

Für $n = 0$ erhalten wir

$$\frac{a_0}{2} = \langle f, c_0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

und für n bzw. $m \geq 1$:

$$a_n = \langle f, c_n \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_m = \langle f, s_m \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad \blacksquare$$

Weiteres Wissenswertes

Stückweise stetig diff.-bare Funktionen

Definition 4.4.1
Eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

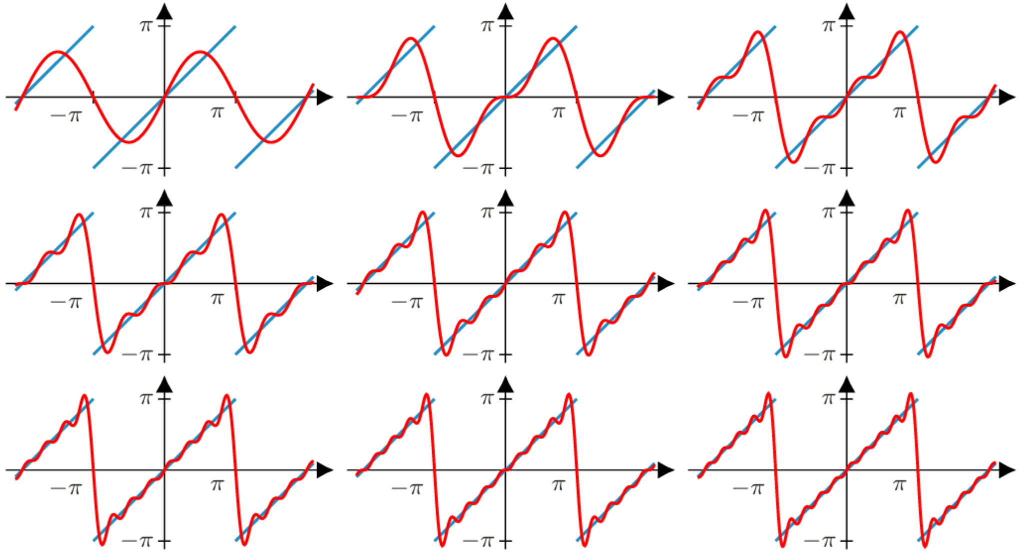
1. Mit Ausnahme endlich vieler Punkte ist f stetig differenzierbar.
2. Falls in jedem Ausnahmepunkt z und in den Randpunkten die einseitigen Grenzwerte $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x<z}} f(x)}_{=f(z^-)}$, $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x>z}} f(x)}_{=f(z^+)}$ und $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x<z}} f'(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to z\\ x<z}} f'(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren.

Satz 4.4.2 (Dirichlet)
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

1. In jedem **inneren** Stetigkeitspunkt $x \in\ ]-\pi, \pi[$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen den Wert $f(x)$.
2. In einer Sprungstelle z ist der Grenzwert der Reihe gleich $\frac{f(z^+)+f(z^-)}{2}$.

Abbildung 5: CAVE: Über den Funktionwert $f(z)$ in einer Sprungstelle z wissen wir nichts.

Gibbs-Tower



$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$	reelle Fourier-Reihe
$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{b_k}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$	Formeln von Euler
$= \frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + ib_k)e^{-ikx}\right)$	Minuszeichen und $\frac{1}{i} = -i$ beachten!
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$	komplexe Fourier-Reihe

Abbildung 7: Rechnung in Komplexe Schreibweise

Schreibweisen - 2

Zusammengefasst können wir die allgemeine Fourierreihe schreiben als:

Satz 4.4.3
Sei $f : [-T/2, T/2[\to \mathbb{C}$. Dann ist die komplexe Fourier-Reihe von f

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i t/T} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2k\pi i t/T} dt.$$

Ich stelle kurz das Beispiel aus dem Buch vor. Dort wird folgende DGL betrachtet:

$$y(x) + y'(x) = f(x) \tag{1}$$

wobei f gegeben ist durch:

$$f(x) = |(x + \pi \mod 2\pi) - \pi| \tag{2}$$

also $f_{|[-\pi,\pi]}|x|$ periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitert.

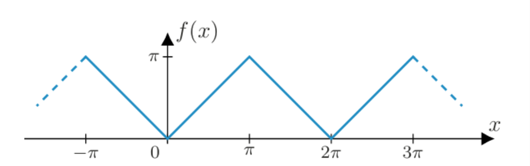


Abbildung 8: Periodische Inhomogenität $f(x)$

Um die unbekannte Funktion nun anzunähern nutzen wir die Fourier-Reihe. Wir wählen also

$$y(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

und durch Ableiten

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\alpha_k \sin(kx) + \beta_k \cos(kx)$$

Differenzialgleichungen - 3

Die gesammte Gleichung heißt also:

$$y'(x) + y(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + k\beta_k) \cos(kx) + \left(\beta_k - k\alpha_k\right) \sin(kx)$$

$$\overset{\text{DGL}}{=} \; f(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(kx) + \delta_k \sin(kx)$$

Man erkennt, dass wir nun ein System aus zwei Fourierreihen haben, deren Parameter gleichgesetzt werden können. Dabei ist $\gamma = \alpha_k + k\beta_k$ und $\delta_k = \beta_k - k\alpha_k$. Da f gerade, also symmetrisch an der y-Achse, ist, müssen alles $\delta_K = 0$ sein. Daraus folgt

$$\beta_k = k\alpha_k \text{ und } \alpha_k = \frac{\gamma_k}{1+k^2}$$

Für γ_k lässt sich nun die gefundene Koeffizienten-Formel anwenden. Dann ergibt sich aufgrund von der Symmetrie von f folgende Formel für γ $\gamma_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$ $= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)dx$.

Daraus folgt für $k = 0$: $\alpha_0 = \gamma_0 =$ und für größere k die Möglichkeit partielle Integration zu nutzen.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{x\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin(kx)}{k}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos(kx)}{k^2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{k^2\pi}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{2}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Differenzialgleichungen - 6

Das wird eingesetzt um die gesuchten Koeffizienten α_k und β_k von y zu finden.

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{-4}{k^2(1+k^2)\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases}, \beta_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{-4}{k^2(1+k^2)\pi}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \tag{3}$$

Lösung der DGL

Mit $k = 2n + 1$ folgt

$$y(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2(1+(2n+1)^2)} + \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^2(1+(2n+1)^2)} \tag{4}$$

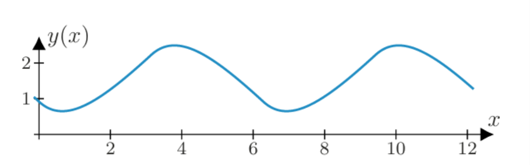


Abbildung 9: Lösende Funktion der DGL

Fragen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Quellen

- Abbildung 1: Heinrich, (2019), Grundlagen Regelungstechnik: Einfache Übungen, praktische Beispiele und komplexe Aufgaben
- Unmarkierte Abb. 1: Carle, (2012), Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme
- Unmarkierte Abb. 2: Adobe, (2025), https://www.allround-pc.com/news/adobe-premiere-pro-bietet-bald-textbasierten-ki-videoschnitt
- Unmarkierte Abb. 4: https://i.ebayimg.com/images/g/75wAAOSwUk5frf9b/s-l1200.jpg
- Graphen Folie 26: Geogebra.org
- Veränderten Bilder von Fourier: chatGPT.com/images
- *Alle weiteren Bilder entstammen dem zu Grunde liegenden Buch*: Casper, M., Hungerbühler, K. (2017). Mathematische Modellierung in den Life Sciences. Springer Spektrum.