

Schriftliche Ausarbeitung im Rahmen des Hauptseminars

Mustafa Akyüz

30. April 2026

Ausführliche Rechnung des Energietransportes

Linearisierte Klein-Gordon Gleichung: $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u = 0$

Wir multiplizieren die Gleichung mit u_t und integrieren zwischen den erstmaligen fixen Punkten x_1 und x_2 .

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} u_t u_{tt} - \alpha^2 u_t u_{xx} + \beta^2 u_t u \, dx = 0 \\ \iff & \int_{x_1}^{x_2} u_t u_{tt} + \beta^2 u_t u \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha^2 u_t u_{xx} \, dx \end{aligned}$$

Mithilfe von partieller Integration haben wir:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \alpha^2 u_t u_{xx} \, dx = \alpha^2 [u_t u_x]_{x_1}^{x_2} - \alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} u_{tx} u_x \, dx \\ \implies & \int_{x_1}^{x_2} u_t u_{tt} + \beta^2 u_t u \, dx = \alpha^2 [u_t u_x]_{x_1}^{x_2} - \alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} u_{tx} u_x \, dx \\ \iff & \int_{x_1}^{x_2} u_t u_{tt} + \alpha^2 u_{tx} u_x + \beta^2 u_t u \, dx = \alpha^2 [u_t u_x]_{x_1}^{x_2} \end{aligned}$$

Mithilfe der Produktregel folgt nun:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_t^2 &= 2u_t u_{tt} \\ \frac{d}{dt} u_x^2 &= 2u_{tx} u_x \\ \frac{d}{dt} u^2 &= 2u_t u \\ \implies \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_t^2 - \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2 \, dx \end{aligned}$$

Sei $E = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2) dx$. Setzen wir jetzt $x_1(t) = -\frac{\pi}{\delta k} + \omega'(k)t$, $x_2(t) = \frac{\pi}{\delta k} + \omega'(k)t$ für die Grenzen ein und leiten E nach t ab. Dafür benötigen wir die Leibniz-Regel für Parameterintegrale.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (2u_t u_{tt} + 2\alpha^2 u_{tx} u_x + 2\beta^2 u_t u) dx + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (u_t u_{tt} + \alpha^2 u_{tx} u_x + \beta^2 u_t u) dx + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \end{aligned}$$

Um weiterzurechnen brauchen wir folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u) &= 0 \\ \iff u_t u_{tt} - \alpha^2 u_t u_{xx} + \beta^2 u_t u &= 0 \\ \iff u_t u_{tt} + \beta^2 u_t u &= \alpha^2 u_t u_{xx} \end{aligned}$$

Dies können wir nun in unser Integral einsetzen.

$$\begin{aligned} & \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (u_t u_{tt} + \alpha^2 u_{tx} u_x + \beta^2 u_t u) dx + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (\alpha^2 u_t u_{xx} + \alpha^2 u_{tx} u_x) dx + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{d}{dx} (\alpha^2 u_t u_x) dx + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= [\alpha^2 u_t u_x]_{x_1(t)}^{x_2(t)} + \frac{1}{2} \omega'(k) [u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \\ &= \left[\frac{1}{2} \omega'(k) (u_t^2 + \alpha^2 u_x^2 + \beta^2 u^2) + \alpha^2 u_t u_x \right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} \end{aligned}$$

Und wir wissen es gilt $u \sim 2A \cos\left(\frac{\delta k}{2}(x - \omega'(k)t)\right) \sin(kx - \omega(k)t)$

Gibt es einen Fehler in dem Buch?

Die Gleichung $u(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\delta k}{2}(x - \omega'(k)t)\right) \sin(kx - \omega(k)t) + \mathcal{O}(\delta k)$ ist korrekt.

Wir beginnen mit $u = A(\sin(kx - \omega(k)t) + \sin(k + (\delta k)x - \omega(k + \delta k)t))$ mit

$\delta k \ll k$.

Und substituieren $\theta_1 = kx - \omega(k)t$ und $\theta_2 = k + (\delta k)x - \omega(k + \delta k)t$.

Mit dem Einsetzen von $\omega(k + \delta k) = \omega(k) + \delta k \omega'(k) + \mathcal{O}((\delta k)^2)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (k + \delta k)x - (\omega(k) + \delta k \omega'(k))t \\ \theta_2 &= \underbrace{kx - \omega(k)t}_{\theta_1} + \underbrace{\delta kx - \omega k \omega'(k)t}_{\Delta\theta}\end{aligned}$$

$$\implies \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$$

Also ist $u = A \sin(\theta_1) + A \sin(\theta_1 + \Delta\theta)$ und wir wissen $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\implies \sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) \quad \text{und} \quad \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$\implies u = 2A \sin\left(kx - \omega(k)t + \underbrace{\frac{1}{2}\delta k(x - \omega'(k)t)}_{\text{für } \delta k \ll k}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\delta k(x - \omega'(k)t)\right)$$

$$\implies u = 2A \sin(kx - \omega(k)t) \cos\left(\frac{1}{2}\delta k(x - \omega'(k)t)\right) + \mathcal{O}(\delta k)$$