Waves on Stretched String II

Wave Motion

Johannes M. Dorn

Matrikelnummer: 2802344

E-Mail: jodorn@students.uni-mainz.de

04. Mai 2026

Seminar: Wave Motion
Dozentin: Prof. Dr. Mária Lukácová-Medvidová
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung bildet den zweiten Teil der Untersuchung von Wellen auf einer gespannten Saite und widmet sich dem Verhalten unendlich langer Saiten. Zunächst wird die eindimensionale Wellengleichung durch eine geeignete Variablentransformation gelöst, woraus hervorgeht, dass sich die allgemeine Lösung als Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen darstellen lässt. Im Anschluss wird die Reflexion und Transmission von Wellen an einer Diskontinuität der Massendichte analysiert. Den Abschluss bildet das Phänomen der Impedanzanpassung: Hierbei wird gezeigt, wie durch das gezielte Einfügen eines Zwischenstücks bei einer Saite mit drei Bereichen unterschiedlicher Dichte eine vollständig reflexionsfreie Transmission erreicht werden kann.

2 Die D'Alembert-Lösung für unendliche Saiten

2.1 Die allgemeine Lösung der Wellengleichung

Für eine sehr lange gespannte Saite können wir annehmen, dass diese Saite unendlich lang ist. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ für } -\infty < x < \infty,\ t \geq 0 \tag{1}$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(x,0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_0(x). \tag{2}$$

Das sind dieselben Anfangsbedingungen wie im endlichen Fall, nur für $-\infty < x < \infty$. Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, führen wir Hilfsvariablen ein:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Mithilfe dieser Hilfsvariablen wollen wir (1) neu schreiben. Dafür müssen wir die partiellen Ableitungen in (1) bezüglich der Hilfsvariablen berechnen. Für die beiden ersten Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} && \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) && \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)
\end{aligned}$$

Und somit folgt für die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(c\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right) = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (1) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
\Leftrightarrow & & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{c^2}c^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right) \\
\Leftrightarrow & & 4\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

Da wir (1) nun in dieser Form vorliegen haben, können wir (3) bezüglich ξ integrieren und erhalten

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = F(\eta),$$

wobei F eine beliebige von η abhängige Funktion ist. Wenn wir erneut integrieren, erhalten wir

$$y = \int^{\eta} F(s)\, ds + g(\xi),$$

wobei g eine beliebige von ξ abhängige Funktion ist. Setzen wir noch zusätzlich $f(\eta) = \int^{\eta} F(s)\, ds$, dann vereinfacht sich y zu $y = f(\eta) + g(\xi)$. Wenn wir nun die Hilfsvariablen zurückübersetzen, ergibt sich

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct), \qquad (4)$$

für jeweils beliebige Funktionen f und g.

2.2 Lösung des Anfangswertproblems

Wir müssen nun f und g so wählen, dass sie die Anfangsbedingungen (2) erfüllen. Für die erste Bedingung gilt

$$y(x,0) = f(x) + g(x) = y_0(x). \qquad (5)$$

Um die zweite Anfangsbedingung einsetzen zu können, müssen wir zuerst $\frac{\partial y}{\partial t}$ berechnen:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct).$$

Damit ergibt sich für die zweite Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) &= -cf'(x) + cg'(x) = v_0(x) \\ \Rightarrow -cf(x) + cg(x) &= \int_a^x v_0(s)\, ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist a eine beliebige Integrationskonstante. Mithilfe von (5) und (6) folgt für f und g:

$$\begin{aligned} && f(x) &= y_0(x) - g(x) \\ \Rightarrow && -c(y_0(x) - g(x)) + cg(x) &= \int_a^x v_0(s)\, ds \\ \Leftrightarrow && 2cg(x) &= \int_a^x v_0(s)\, ds + cy_0(x) \\ \Leftrightarrow && g(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)\, ds \\ \Rightarrow && f(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x v_0(s)\, ds \end{aligned}$$

Setzen wir das in (4) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= f(x-ct) + g(x+ct) \\ &= \frac{1}{2}y_0(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_a^{x-ct} v_0(s)\, ds + \frac{1}{2}y_0(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_a^{x+ct} v_0(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2}\left(y_0(x-ct) + y_0(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Lösung ist unter dem Namen *D'Alembertsche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung* bekannt.
Betrachten wir zwei Beispiele. Zuerst betrachten wir die Anfangsbedingungen

$$v_0(x) = 0, \qquad y_0(x) = H(x+a) - H(x-a). \tag{8}$$

Dabei ist $H(x)$ die *Heaviside-Funktion*, definiert durch

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Die Anfangsbedingungen stellen eine anfänglich stationäre Saite dar, welche durch die *Top-Hat-Funktion* ausgelenkt ist. Die Top-Hat-Funktion ist 1 für $-a < x < a$ und ansonsten 0. Diese Anfangsbedingungen sind nur theoretisch möglich und stellen keine reale physikalische Situation dar, weil die Anfangsauslenkung $y_0(x)$ an den Stellen $x = \pm a$ Sprungstellen aufweist und somit unstetig ist. Sie bietet eine gute Anschauung und ist mathematisch wohldefiniert. Indem wir die Anfangsbedingungen (8) in die D'Alembertsche Lösung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \frac{1}{2}\left(y_0(x-ct)+y_0(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s)\, ds \\ &= \frac{1}{2}\left(H(x-ct+a)-H(x-ct-a)+H(x+ct+a)-H(x+ct-a)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Der erste Ausdruck ist eine nach rechtslaufende Top-Hat-Funktion, während der zweite Ausdruck eine nach linkslaufende Top-Hat-Funktion beschreibt. Für $0 \leq t \leq a/c$ überlappen sich diese beiden Wellen, für $t > a/c$ laufen sie separat weiter.
Für ein weiteres Beispiel betrachten wir folgende Anfangsbedingungen:

$$y_0(x) = a\sin(kx), \quad v_0(x) = 0. \tag{11}$$

Die Saite ist anfangs wieder stationär, aber in diesem Fall ist sie überall sinusförmig ausgelenkt. Setzen wir diese Anfangsbedingungen wieder in unsere Lösung ein, erhalten wir:

$$y(x,t) = \frac{1}{2}a\left(\sin(k(x+ct))+\sin(k(x-ct))\right) = \frac{a}{2}\left(\sin(kx+kct)+\sin(kx-kct)\right).$$

Wir nutzen das Additionstheorem $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$ mit $\alpha = kx$ und $\beta = kct$:

$$y(x,t) = \frac{a}{2}\left(2\sin(kx)\cos(kct)\right) = a\sin(kx)\cos(kct). \tag{12}$$

Wir erhalten eine stehende Welle, und haben so gezeigt, wie man eine stehende Welle durch eine nach rechtslaufende und eine nach linkslaufende Welle mit gleicher Amplitude erzeugen kann.

3 Reflexion und Transmission an Diskontinuitäten

3.1 Eine einzelne Unstetigkeitsstelle

Wir betrachten nun eine Saite mit Dichte ρ_1, Wellengeschwindigkeit $c_1 = \sqrt{T/\rho_1}$ für $x < 0$, und Dichte ρ_2 und Wellengeschwindigkeit $c_2 = \sqrt{T/\rho_2}$ für $x > 0$. Eine von links einlaufende Welle $f_I(x - c_1 t)$ wird zu einem Teil an der Unstetigkeitsstelle reflektiert und zu einem Teil transmittiert. Wir suchen also eine Lösung der Form

$$y(x,t) = \begin{cases} f_I(x - c_1 t) + f_R(x + c_1 t) & \text{für } x < 0, \\ f_T(x - c_2 t) & \text{für } x > 0. \end{cases} \tag{13}$$

In diesem Fall beschreibt $f_R(x+c_1t)$ die reflektierte Welle und $f_T(x-c_2t)$ die transmittierte Welle. f_I, f_T und f_R müssen zwei Bedingungen erfüllen: Die Saite bricht nicht an der Stelle $x = 0$ und die Spannung der Saite ist konstant. Also muss gelten:

$$\begin{aligned} f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) &= f_T(-c_2 t) \\ f_I'(-c_1 t) + f_R'(c_1 t) &= f_T'(-c_2 t). \end{aligned} \tag{14}$$

Die zweite Bedingung können wir integrieren und erhalten

$$-\frac{1}{c_1} f_I(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} f_R(c_1 t) = -\frac{1}{c_2} f_T(-c_2 t). \tag{15}$$

Wir nutzen die beiden Bedingungen, um f_T und f_R zu bestimmen. Zuerst stellen wir (14) nach f_R um und erhalten $f_R(c_1t) = f_T(-c_2t) - f_I(-c_1t)$. Dies setzen wir in (15) ein und lösen nach f_T auf:

$$\begin{aligned} & & -\frac{1}{c_1} f_I(-c_1 t) + \frac{1}{c_1} f_R(c_1 t) &= -\frac{1}{c_2} f_T(-c_2 t) \\ &\Leftrightarrow & -f_I(-c_1 t) + f_R(c_1 t) &= -\frac{c_1}{c_2} f_T(-c_2 t) \\ &\Leftrightarrow & -f_I(-c_1 t) + f_T(-c_2 t) - f_I(-c_1 t) &= -\frac{c_1}{c_2} f_T(-c_2 t) \\ &\Leftrightarrow & -2 f_I(-c_1 t) + f_T(-c_2 t) &= -\frac{c_1}{c_2} f_T(-c_2 t) \\ &\Leftrightarrow & f_T(-c_2 t)\left(\frac{c_1 + c_2}{c_2}\right) &= 2 f_I(-c_1 t) \\ &\Leftrightarrow & f_T(-c_2 t) &= 2\frac{c_2}{c_1 + c_2} f_I(-c_1 t) \end{aligned}$$

Also folgt für $f_T(x - c_2t)$:

$$f_T(x - c_2 t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} f_I\left(\frac{c_1}{c_2}(x - c_2 t)\right). \tag{16}$$

Durch ähnliche Umformungsschritte erhalten wir

$$f_R(c_1 t) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} f_I(-c_1 t).$$

Und daher gilt für $f_R(x + c_1t)$:

$$f_R(x + c_1 t) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} f_I(-(x + c_1 t)). \tag{17}$$

Die Amplitude der transmittierten Welle entspricht dem $\frac{2c_2}{c_1+c_2}$-fachen der einfallenden Amplitude und die Amplitude der reflektierten Wellen dem $\frac{c_2-c_1}{c_1+c_2}$-fachen. Wenn c_1 und c_2 gleich sind, gibt es keine Unstetigkeitsstelle in unserer Saite und es existiert keine reflektierte Welle. Wenn c_1 sehr viel größer als c_2 ist, dann ist ρ_2 sehr viel größer als ρ_1. Die transmittierte Welle hat in diesem Fall eine kleine Amplitude, und die reflektierte Welle hat dieselbe Amplitude wie die Ausgangswelle, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen. Dieser Fall stellt eine Saite dar, welche für $x > 0$ quasi unbeweglich ist und an der die gesamte Ausgangswelle reflektiert wird. Für den Fall, dass c_2 sehr viel größer als c_1 ist (und damit ρ_1 sehr viel größer als ρ_2), ist die Amplitude der reflektierten Welle genau so groß wie die Amplitude der Ausgangswelle, diesmal mit demselben Vorzeichen. Die Amplitude der transmittierten Welle ist doppelt so groß wie die Amplitude der Ausgangswelle. Diese Situation beschreibt eine Saite, welche für $x > 0$ deutlich leichter ist als für $x < 0$. Dadurch kann mit wenig Energie eine starke Auslenkung der transmittierten Welle erzeugt werden.

3.2 Zwei Unstetigkeitsstellen: Impedanzanpassung

Wir betrachten nun eine Situation, in der wir drei Saiten mit unterschiedlichen Dichten verbinden, also gilt für die Wellengeschwindigkeit

$$c = \begin{cases} c_1 & \text{für } x < 0, \\ c_2 & \text{für } 0 < x < L, \\ c_3 & \text{für } x > L. \end{cases}$$

Im Allgemeinen wird eine von links kommende Welle für $x < 0$ reflektiert, zwischen 0 und L reflektiert und transmittiert und für $x > L$ wird die Welle transmittiert. Wir wollen nun den Fall untersuchen, in dem keine Welle reflektiert wird für $x < 0$ und somit die gesamte Welle transmittiert wird. Wir sprechen dann davon, dass die beiden halbunendlichen Saiten *impedanzangepasst* sind. Die Impedanz einer Saite ist ein Maß dafür, wie schwer es ist, die Saite zu bewegen. Für eine gespannte Saite ist die Impedanz definiert als

$$Z(x_0) = -\frac{F_y}{v_y},$$

dabei ist F_y vertikale Kraft, die auf die Saite wirkt, und v_y die vertikale Geschwindigkeit. Daher gilt für die Impedanz

$$Z = -\frac{T\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}}.$$

Wenn wir eine rechtslaufende Welle der Form $y = f(x - ct)$ einsetzen, erhalten wir $Z = T/c = \sqrt{\rho T}$. Da T näherungsweise konstant bleibt, verhält sich Z so wie $\sqrt{\rho}$.
Für unsere Saite, die aus drei verschiedenen Saiten besteht, können wir die Lösung der Wellengleichung in folgender Form schreiben:

$$y = \begin{cases} \exp\Big\{i\omega\left(t - \frac{x}{c_1}\right)\Big\} & \text{für } x \leq 0, \\ T_2 \exp\Big\{i\omega\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\Big\} + R_2 \exp\Big\{i\omega\left(t + \frac{x}{c_2}\right)\Big\} & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ T_3 \exp\Big\{i\omega\left(t - \frac{x}{c_3}\right)\Big\} & \text{für } x \geq L. \end{cases} \tag{18}$$

Wie auch im vorherigen Teil müssen hier y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ bei $x = 0$ und $x = L$ stetig sein. Aus der Stetigkeit bei $x = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & & \exp(i\omega t) &= T_2 \exp(iwt) + R_2 \exp(iwt) \\ &\Leftrightarrow & 1 &= T_2 + R_2 \end{aligned}$$

Für die Stetigkeitsbedingungen bei $\frac{\partial y}{\partial x}$ müssen wir die jeweiligen Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} x \leq 0: & \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c_1} \exp\left(i\omega(t - \frac{x}{c_1})\right) \\ 0 \leq x \leq L: & \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -T_2 \frac{i\omega}{c_2} \exp\left(i\omega(t - \frac{x}{c_2})\right) + R_2 \frac{i\omega}{c_2} \exp\left(i\omega(t + \frac{x}{c_2})\right) \\ x \geq L: & \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c_3} T_3 \exp\left(i\omega(t - \frac{x}{c_3})\right) \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung der Ableitung bei $x = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & & -\frac{i\omega}{c_1} \exp(i\omega t) &= -T_2 \frac{i\omega}{c_2} \exp(i\omega t) + R_2 \frac{i\omega}{c_2} \exp(i\omega t) \\ &\Leftrightarrow & -\frac{i\omega}{c_1} &= -T_2 \frac{i\omega}{c_2} + R_2 \frac{i\omega}{c_2} \\ &\Leftrightarrow & T_2 - R_2 &= \frac{c_2}{c_1} \end{aligned}$$

Die Stetigkeitsbedingungen bei $x = L$ ergeben analog:

$$\begin{aligned} T_2 \exp\left(-i\omega \frac{L}{c_2}\right) + R_2 \exp\left(i\omega \frac{L}{c_2}\right) &= T_3 \exp\left(-i\omega \frac{L}{c_3}\right) \\ T_2 \exp\left(-i\omega \frac{L}{c_2}\right) - R_2 \exp\left(i\omega \frac{L}{c_2}\right) &= \frac{c_2}{c_3} T_3 \exp\left(-i\omega \frac{L}{c_3}\right) \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem aus den vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}2T_2 = 1 + \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow 2T_2 = \frac{c_1 + c_2}{c_1} \Leftrightarrow T_2 = \frac{c_1 + c_2}{2c_1}\\ 2R_2 = 1 - \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow 2R_2 = \frac{c_1 - c_2}{c_1} \Leftrightarrow R_2 = \frac{c_1 - c_2}{2c_1}\end{aligned}$$

Wir setzen die dritte Gleichung in die vierte Gleichung ein und erhalten so:

$$\begin{aligned} & T_2 \exp\left(-i\omega\frac{L}{c_2}\right) - R_2 \exp\left(i\omega\frac{L}{c_2}\right) = \frac{c_2}{c_3}\left(T_2 \exp\left(-i\omega\frac{L}{c_2}\right) + R_2 \exp\left(i\omega\frac{L}{c_2}\right)\right)\\ \Leftrightarrow\quad & T_2 \exp\left(-i\omega\frac{L}{c_2}\right)(c_3 - c_2) = R_2 \exp\left(i\omega\frac{L}{c_2}\right)(c_3 + c_2)\\ \Leftrightarrow\quad & \left(\frac{c_1 + c_2}{2c_1}\right)(c_3 - c_2)\exp\left(-i\omega\frac{L}{c_2}\right) = \left(\frac{c_1 - c_2}{2c_1}\right)(c_3 + c_2)\exp\left(i\omega\frac{L}{c_2}\right)\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{(c_1 + c_2)(c_3 - c_2)}{(c_1 - c_2)(c_3 + c_2)} = \exp\left(2i\omega\frac{L}{c_2}\right)\end{aligned}$$

Verwenden wir die Euler-Formel $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ und nehmen davon den Realteil (weil wir nur an reellen Lösungen interessiert sind), erhalten wir:

$$\cos\left(\frac{2\omega L}{c_2}\right) = \left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}\right)\left(\frac{c_3 - c_2}{c_3 + c_2}\right)$$

Wählen wir $c_2 = \sqrt{c_1 c_3}$, vereinfacht sich unsere Gleichung zu

$$\cos\left(\frac{2\omega L}{c_2}\right) = -1.$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $\frac{2\omega L}{c_2}$ ein ungerades Vielfaches von π sein, also gilt für L:

$$L = \frac{\pi}{2}\frac{c_2}{\omega} = \frac{\lambda}{4}.$$

Dabei ist λ die Wellenlänge der Störung der mittleren Saite. Anders ausgedrückt erhalten wir keine reflektierte Welle, wenn die Dichte der mittleren Saite gerade das geometrische Mittel der beiden anderen Saiten ist, und die Länge L gerade einem Viertel der Wellenlänge entspricht.

Das Prinzip der Impedanzanpassung findet in der Physik verschiedene Anwendungen. So wird es zum Beispiel bei Militär-U-Booten zum Tarnen benutzt oder bei reflexionsfreien Verbindungen von Stromleitungen.

4 Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung für eine unendlich lange Saite durch die Superposition zweier entgegengesetzt laufender Wellen beschrieben wird. Das Beispiel der Top-Hat-Funktion veranschaulicht dieses Prinzip besonders anschaulich.
Darüber hinaus wurde gezeigt, dass an der Verbindungsstelle zweier Saiten mit unterschiedlichen Dichten – und somit unterschiedlichen Wellengeschwindigkeiten – sowohl Reflexion als auch Transmission auftreten. Die Betrachtung der extremen Grenzfälle verdeutlicht dabei das physikalische Verhalten: Geht die Welle in ein deutlich dichteres Medium über, wird sie mit nahezu gleicher Amplitude, aber umgekehrtem Vorzeichen reflektiert, während die transmittierte Welle verschwindend gering bleibt. Beim Übergang in ein wesentlich leichteres Medium hingegen erfolgt die Reflexion mit gleichem Vorzeichen, und die Amplitude der transmittierten Welle verdoppelt sich näherungsweise.
Schließlich wurde das Konzept der Impedanzanpassung bei einer Saite mit zwei Unstetigkeitsstellen untersucht. Eine vollständig reflexionsfreie Transmission an der ersten Grenzfläche lässt sich gezielt erreichen, wenn die Dichte des Zwischenstücks exakt das geometrische Mittel der beiden angrenzenden Dichten bildet und seine Länge einem Viertel der lokalen Wellenlänge entspricht. Dieses Prinzip der Impedanzanpassung ist von zentraler Bedeutung und findet breite Anwendung in zahlreichen technischen und physikalischen Bereichen, wie etwa der Optik oder der Radartechnik.

Literatur

[1] J. Billingham, A. C. King. *Wave Motion.* Cambridge University Press, Chapter 2: Waves on a Stretched String.