

Elektromagnetische Wellen

Geonho Park

Juni 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrische und magnetische Felder	3
2	Maxwell-Gleichungen	5
2.1	Divergenz eines elektrischen Feldes	5
2.2	Divergenz eines magnetischen Feldes	6
2.3	Rotation eines elektrischen Feldes	7
2.4	Rotation eines magnetischen Feldes	8
3	Elektrische und magnetische Felder als Wellen	9
4	Energie elektromagnetischer Wellen	12
5	Elektromagnetische Wellen in Leitern und Isolatoren	15

1 Elektrische und magnetische Felder

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Herleitung der Maxwell Gleichungen eingeführt. Diese Formeln wurden historisch experimentell hergeleitet und beschreiben die Kraft und Felder, die durch Ladungen und Strom erzeugt werden. Als erstes betrachten wir uns die elektrische Kraft, die zwischen zwei Punktladungen x_1 und x_2 mit Ladung q_1 und q_2 wirkt. Diese wird durch

$$F = \frac{q_1 q_2 (x_2 - x_1)}{4\pi\epsilon_0 |x_2 - x_1|^3}$$

beschrieben, wobei $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$ die Permittivität im Vakuum ist. Für das elektrische Feld, welches von einer Punktladung erzeugt wird, soll die Kraft, die auf eine zweite Punktladung wirkt, durch $F = q_2 E$ dargestellt werden. Es folgt daher

$$E = \frac{q_1 (x_2 - x_1)}{4\pi\epsilon_0 |x_2 - x_1|^3}.$$

Weiterhin hat man beobachtet, dass elektrischer Strom ein magnetisches Feld senkrecht zur Stromrichtung erzeugt. Die Kraft, die auf geschlossene Stromkreise C_1 und C_2 , durch die Strom der Stärke I_1 bzw. I_2 fließt, wirkt, wird dabei durch

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{dx_2 \times (dx_1 \times (x_2 - x_1))}{|x_2 - x_1|^3}$$

beschrieben. Es ist $\mu_0 \approx 1,257 \cdot 10^{-6} Hm^{-1}$ die Permeabilität im Vakuum. Ähnlich wie im elektrischen Fall, soll $dF = I_2 dx_2 \times dB$ für ein magnetisches Feld gelten. Hierbei wird das Differential der Kraft betrachtet, da die Kraft durch einen Fluss erzeugt wird, weshalb man ein infinitesimales Leiterstück anschauen muss. Für das magnetische Feld gilt dann

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 dx_1 \times \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3}. \quad (1.1)$$

Das Zusammenspiel dieser beiden Kräfte auf ein sich mit Geschwindigkeit v bewegendes Teilchen mit Ladung q wird durch die Lorentz-Kraft beschrieben. Die Herleitung lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} dF &= q \cdot dE + Idx \times dB \\ &= q \cdot dE + \frac{q}{dt} dx \times dB \\ &= q(dE + v \times dB). \end{aligned}$$

Also

$$F = q(E + v \times B). \quad (1.2)$$

Man sieht also, dass die Kraft eine Komponente hat, die senkrecht zur Bewegungsrichtung zeigt.

Nun führen wir Begriffe für Volumen V mit Ladung ein: Die Ladungsdichte ρ und die elektrische Flussdichte j . Diese werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{V} \int_V \rho(x) d^3x \\ j(x) &= \frac{1}{V} \int_V j(x) d^3x. \end{aligned}$$

Entsprechend kann ein elektrisches Feld für ein Volumen definiert werden durch

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|^3} dx_0. \quad (1.3)$$

Weiterhin kann die Ladungserhaltung als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot j \quad (1.4)$$

formuliert werden. Intuitiv sagt diese Gleichung aus, dass sich die Ladung eines Volumens um genau die Menge ändert, die rausfließt.

2 Maxwell-Gleichungen

Jetzt untersuchen wir Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder und deren Zusammenspiel, welche durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben werden.

2.1 Divergenz eines elektrischen Feldes

Wendet man 1.3 auf eine Punktladung an, erhält man

$$E(x) = \frac{\rho(x_0)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}.$$

Wir wollen den Fluss einer Punktladung x_0 durch ein Volumen V bestimmen, welcher durch

$$\int_{\partial V} E \cdot ndS$$

beschrieben wird. Als erstes betrachten wir uns den Fall, dass $x_0 \notin V$. Dann folgt mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\partial V} E \cdot ndS = \int_V \nabla \cdot E d^3x.$$

Betrachtet man sich den Integranden $\nabla \cdot E$, erhält man nach vektoranalytischen Umformungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot (x - x_0) \frac{1}{|x - x_0|^3} + (x - x_0) \cdot \nabla \frac{1}{|x - x_0|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x - x_0|^3} + (x - x_0) \cdot \left(-\frac{3}{|x - x_0|^4} \nabla |x - x_0| \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x - x_0|^3} + (x - x_0) \cdot \left(-\frac{3}{|x - x_0|^4} \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x - x_0|^3} - \frac{3}{|x - x_0|^3} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\int_{\partial V} E \cdot ndS = 0$$

für $x_0 \notin V$. Für den Fall $x \in V$ betrachten wir uns einen Ball $B_r(x_0) \subseteq V$. Nach obiger Beobachtung gilt nun

$$\int_{\partial V'} E \cdot n dS = 0$$

mit $V' = V \setminus B_r(x_0)$. Beachte nun, dass $\partial V' = \partial V \cup \partial B_r(x_0)$ ist und somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} E \cdot n dS &= \int_{\partial V'} E \cdot n dS - \int_{\partial B_r(x_0)} E \cdot n dS \\ &= - \int_{\partial B_r(x_0)} E \cdot n dS \\ &= \int_{\partial B_r(x_0)} E \cdot n_0 dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi\epsilon_0} d\varphi \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

gilt, wobei mit n_0 das Einheitsnormalenvektorfeld von $B_r(x_0)$. Hebt man diese Berechnungen nun auf die Ebene geladener Volumen, erhält man

$$\int_V \nabla \cdot E d^3x = \int_V \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} d^3x.$$

Da dies für alle Volumen gilt, folgt

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2.2 Divergenz eines magnetischen Feldes

Für die Divergenz eines magnetischen Feldes betrachten wir uns nun 1.1 in Integralform:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V Idx \times \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V j(x_0) \times \left(-\nabla \frac{1}{|x - x_0|}\right) d^3x_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \frac{1}{|x - x_0|} \times j(x_0) d^3x_0 \end{aligned}$$

Für den nächsten Umformungsschritt betrachte

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{j(x_0)}{|x - x_0|} &= \frac{1}{|x - x_0|} \nabla \times j(x_0) + \nabla \frac{1}{|x - x_0|} \times j(x_0) \\ &= \nabla \frac{1}{|x - x_0|} \times j(x_0). \end{aligned}$$

Der erste Term fällt hierbei weg, weil $j(x_0)$ nicht von x abhängt. Aus dieser Überlegung folgt

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \frac{1}{|x - x_0|} \times j(x_0) d^3x_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{j(x_0)}{|x - x_0|} d^3x_0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{j(x_0)}{|x - x_0|} d^3x_0. \end{aligned}$$

Also sieht man direkt, weil für jedes Vektorfeld v gilt, dass $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$,

$$\nabla \cdot B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \left(\nabla \times \int_V \frac{j(x_0)}{|x - x_0|} d^3x_0 \right) = 0.$$

Es gilt also

$$\nabla \cdot B = 0.$$

2.3 Rotation eines elektrischen Feldes

Um die Rotation eines elektrischen Feldes zu bestimmen, ist es wichtig das Konzept der Induktion zu kennen. Kurz gesagt ist dies die Tatsache, dass in einem Leiter, der durch ein magnetisches Feld bewegt wird, ein Strom erzeugt wird. Aus dieser Beobachtung, kann man schließen, dass auf den Leiter C eine Kraft wirkt. Es folgt also

$$\int_C F \cdot dx \neq 0.$$

Da die durch Lorentz beschriebene Kraft proportional zu $E + v \times B$ ist, aber $v \times B \cdot dx = 0$ ist, weil v parallel zu dx ist, gilt

$$\mathcal{E} = \int_S E \cdot dx \neq 0.$$

Hier ist $\mathcal{E}$ die elektromotorische Kraft, welche auch durch $-\frac{d}{dt} \int_C B \cdot ndS$ berechnet werden kann. Es folgt mit Satz von Stokes

$$\int_S (\nabla \times E) \cdot ndS = \int_C E \cdot dx = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ndS = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ndS.$$

Damit erhält man also

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

2.4 Rotation eines magnetischen Feldes

In der Physik gibt es eine Formel von Ampère für zeitunabhängige Ströme, also $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, die wie folgt lautet:

$$\nabla \times B = \mu_0 j.$$

Warum diese Formel nur für zeitunabhängige Ströme gilt, sieht man direkt anhand der Rechnung

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \cdot j.$$

Da die linke Seite 0 ist, folgt aus der Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Für zeitabhängige Ströme ist dies jedoch ungleich 0. Um die Formel für solche Ströme anzupassen, führt man einen Verschiebungsstrom j_D ein und schreibt die Formel wie folgt um:

$$\nabla \times B = \mu_0(j + j_D).$$

Mit der Wahl $j_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (j + j_D) &= \nabla \cdot j + \nabla \cdot j_D \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \cdot E}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit sorgt der Verschiebungsstrom dafür, dass die Gleichung weiterhin stimmt. Diese Anpassung für zeitabhängige Ströme ist die 4. Maxwell-Gleichung. Mit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ gilt als0

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (2.1)$$

3 Elektrische und magnetische Felder als Wellen

Im Folgenden betrachten wir uns die quellfreien Maxwell-Gleichungen, das heißt $\rho = 0$ und $j = 0$. Wir erhalten

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Offensichtlich ist $B = E = 0$ eine Lösung. Diese Lösung besagt jedoch lediglich, dass nicht aus dem Nichts elektrische oder magnetische Felder entstehen. Im Folgenden untersuchen wir, ob es noch eine weitere Lösung gibt. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E) &\stackrel{3.3}{=} \nabla \times \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\nabla \times B)}{\partial t} \stackrel{3.4}{=} -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times B) &\stackrel{3.4}{=} \nabla \times \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial(\nabla \times E)}{\partial t} \stackrel{3.3}{=} -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für die doppelte Rotation

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times E) &= \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E \stackrel{3.1}{=} -\nabla^2 E \\ \nabla \times (\nabla \times B) &= \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B \stackrel{3.2}{=} -\nabla^2 B. \end{aligned}$$

Aus diesen Erkenntnissen folgert man nun

$$\begin{aligned} \nabla^2 E &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \nabla^2 B &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Dies sind genau die mehrdimensionalen Wellengleichungen. Man schließt also, dass elektrische und magnetische Felder Wellen sind, die sich mit Geschwindigkeit $c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$ im Vakuum ausbreiten. Unter der Annahme, dass die Wellen sich in z-Richtung ausbreiten und ebene Wellen sind, erhält man für die Wellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} E(r, t) &= \Re(E_C(z)e^{i\omega t}) \\ B(r, t) &= \Re(B_C(z)e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

wobei wir im Folgenden der Übersichtlichkeit halber $\Re()$ weglassen. Um nun E_C zu bestimmen, setzen wir obige Gleichung für das elektrische Feld in die Wellengleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned}\nabla^2 E_C(z) e^{i\omega t} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} E_C(z) e^{i\omega t} \\ \Longleftrightarrow \nabla^2 E_C(z) e^{i\omega t} &= -\frac{\omega^2}{c_0^2} E_C(z) e^{i\omega t} \\ \Longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_C(z) &= -\frac{\omega^2}{c_0^2} E_C(z),\end{aligned}$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$E_C(z) = E_0 e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}}.$$

Analog erhält man

$$B_C(z) = B_0 e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}}.$$

Wegen 3.1 muss

$$\nabla \cdot E(r, t) = \frac{\partial}{\partial z} E_{0,z} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} = \pm E_{0,z} \frac{i\omega}{c_0} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow E_{0,z} = 0$$

gelten. Mit gleicher Rechnung für $B(r, t)$ folgt

$$B_{0,z} = 0.$$

Die elektrischen und magnetischen Felder liegen also in der (x, y) -Ebene. Wegen 3.3 sieht man außerdem

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man die ersten Einträge erhält man

$$\begin{aligned}-\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \Longleftrightarrow -\frac{\partial}{\partial z} E_{0,y} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} &= -\frac{\partial}{\partial t} B_{0,x} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} \\ \Longleftrightarrow \mp E_{0,y} \frac{i\omega}{c_0} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} &= \pm B_{0,x} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} i\omega e^{i\omega t} \\ \Longleftrightarrow B_{0,x} &= -\frac{1}{c_0} E_{0,y}.\end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\
\iff \frac{\partial}{\partial z} E_{0,x} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} &= -\frac{\partial}{\partial t} B_{0,y} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} \\
\iff \pm E_{0,x} \frac{i\omega}{c_0} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} &= \pm B_{0,y} e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} i\omega e^{i\omega t} \\
\iff B_{0,y} &= \frac{1}{c_0} E_{0,x}.
\end{aligned}$$

Fasst man diese Gleichungen als Vektoren zusammen, sieht man

$$\begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} -E_{0,y} \\ E_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times E_0.$$

Mit dem Wellenzahlvektor $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{c_0} \end{pmatrix}$ bildet also (k, E_0, B_0) ein Orthogonalsystem.

Die lineare Hülle $\text{span}(k, E_0)$ bezeichnet man als die Polarisationssebene. Mithilfe des Wellenzahlvektors kann man nun $E(r, t)$ und $B(r, t)$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
E(r, t) &= E_0 e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} = E_0 e^{i(\omega t \pm k \cdot r)} \\
B(r, t) &= B_0 e^{\pm \frac{i\omega z}{c_0}} e^{i\omega t} = B_0 e^{i(\omega t \pm k \cdot r)} \\
&= \frac{1}{\omega} (k \times E_0) e^{i(\omega t \pm k \cdot r)}.
\end{aligned}$$

Das magnetische Feld steht also stets senkrecht auf dem elektrischen Feld. Da die z-Komponente für beide Felder immer 0 ist, stehen die Felder auch senkrecht auf k . Für reelle k bezeichnet man elektromagnetische Wellen mit $E_0 = \lambda v$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{R}^3$ als eben polarisiert. Falls $|\Re(E_0)| = |\Im(E_0)|$, spricht man von zirkular polarisierten Wellen und sonst von elliptisch polarisierten Wellen. Diese Bezeichnungen stammen aus den jeweiligen Bahnen, die die Felder entlanglaufen.

4 Energie elektromagnetischer Wellen

In diesem Kapitel betrachten wir uns die Energie der elektromagnetischen Wellen. Dazu rufen wir uns die Formel 1.2 für die Lorentz-Kraft in Erinnerung und heben diese auf Volumenebene und erhalten

$$F = \rho E + j \times B.$$

Betrachtet man die Leistung, die durch ein geladenes Teilchen und dessen elektrisches Feld verursacht wird, gilt

$$P = v \cdot F = v \cdot (\rho E + j \times B) = \rho v \cdot E + v \cdot (j \times B) \stackrel{j=\rho v}{=} E \cdot j.$$

Für die Gesamtleistung folgt also

$$\begin{aligned} P_{\text{Ges}} &= \int_V E \cdot j d^3x \\ &\stackrel{2.1}{=} \int_V E \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) d^3x \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_V E \cdot (\nabla \times B) d^3x - \varepsilon_0 \int_V E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} d^3x \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int_V \nabla \cdot (E \times B) d^3x + \frac{1}{\mu_0} \int_V B \cdot (\nabla \times E) d^3x - \varepsilon_0 \int_V E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} d^3x \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int_S (E \times B) \cdot ndS - \frac{1}{\mu_0} \int_V B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} d^3x - \varepsilon_0 \int_V E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} d^3x. \end{aligned}$$

Wendet man nun

$$\frac{\partial}{\partial t} U \cdot U = 2 \left(U \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

auf die hinteren Integrale an, erhält man

$$P_{\text{Ges}} = -\frac{1}{\mu_0} \int_S (E \times B) \cdot ndS - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\mu_0} \int_V |B|^2 d^3x + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V |E|^2 d^3x \right).$$

Wählt man nun V so groß, dass keine Energie aus V rausfließt, fällt der erste Term weg und es gilt

$$P_{\text{Ges}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\mu_0} \int_V |B|^2 d^3x + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V |E|^2 d^3x \right).$$

Mit der Gleichung $P = -\frac{d}{dt} J$, wobei J Energie ist, folgt für die Energiedichte

$$\langle J \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} |E|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B|^2.$$

Den Term, der in obiger Rechnung weggefallen ist, nennt man Poyntingvektor $P_0 = \frac{1}{\mu_0} E \times B$. Dieser beschreibt den Energiefluss pro Flächeneinheit in einer elektromagnetischen Welle. Nun wollen wir die durchschnittliche Energiedichte während einer Periode bestimmen. Betrachte dazu zuerst

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{\omega} (k \times E_0) \\ \Rightarrow |B_0| &= \frac{|k|}{\omega} |E_0| = \frac{1}{c_0} |E_0| \\ \Leftrightarrow |E_0|^2 &= c_0^2 |B_0|^2 \end{aligned}$$

Weiterhin kann man die Energiegleichung schreiben als

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} |E(t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B(t)|^2 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |E_0|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B_0|^2 \right) |\Re(e^{i(\omega t \pm k \cdot r)})|^2 \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |E_0|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |B_0|^2 \right) |\cos(\omega t \pm k \cdot r)|^2. \end{aligned}$$

Da die Mittelung des Quadrats des Kosinus über eine Periode $\frac{1}{2}$ ist, folgt

$$\langle J \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |E_0|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |B_0|^2.$$

Außerdem gilt nach obiger Überlegung

$$\frac{\varepsilon_0}{4} |E_0|^2 = \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{4} |B_0|^2 = \frac{1}{4\mu_0} |B_0|^2.$$

Die Energie über eine Periode kommt also gleichermaßen aus dem elektrischen und dem magnetischen Feld. Für den Poyntingvektor gilt

$$P(t) = \frac{1}{\mu_0} E(t) \times B(t) = \frac{1}{\mu_0} (E_0 \times B_0) |\cos(\omega t \pm k \cdot r)|^2.$$

Über eine Periode gemittelt, folgt

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} (E_0 \times B_0) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(E_0 \times \frac{1}{\omega} k \times E_0 \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{\omega} k (E_0 \cdot E_0) - E_0 (E_0 \cdot \frac{1}{\omega} k) \right) \\ &= \frac{|E_0|^2}{2\mu_0 \omega} k \end{aligned}$$

Also fließt, die Energie, wie erhofft, in dieselbe Richtung, die die elektromagnetische Welle. Für die Transportgeschwindigkeit c_g der Energie gilt mit $|k| = \frac{\omega}{c_0}$ und $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$$\begin{aligned}
 c_g &= \frac{\langle P \rangle}{\langle J \rangle} \\
 &= \frac{\frac{|E_0|^2}{2\mu_0\omega} k}{\frac{\varepsilon_0}{4}|E|^2 + \frac{1}{4\mu_0}|B|^2} \\
 &= \frac{\frac{|E_0|^2}{2\mu_0\omega} k}{\frac{\varepsilon_0}{2}|E_0|^2} \\
 &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\omega} k \\
 &= c_0 \frac{k}{|k|}.
 \end{aligned}$$

Die Energie fließt demnach exakt mit derselben Geschwindigkeit wie die Welle. Man spricht auch davon, dass keine Dispersion auftritt.

5 Elektromagnetische Wellen in Leitern und Isolatoren

In diesem Kapitel betrachten wir elektromagnetische Wellen in Leitern. Da Elektronen in Leitern fließen können, ist es nicht erstaunlich, dass diese mit elektromagnetischen Wellen wechselwirken. Dies führt zu folgenden Anpassungen der Maxwell Gleichungen

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (5.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \mu_0 H &= B - M \\ D &= \varepsilon_0 E + P, \end{aligned}$$

wobei P die Polarisation und M die Magnetisierung beschreibt. Diese Zusammenhänge lassen sich weiter für isotrope Materialien und schwache elektromagnetische Wellen vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \mu H &= B \\ D &= \varepsilon E \end{aligned}$$

mit der Dielektrizitätskonstante ε und der magnetischen Permeabilität μ , welche materialabhängige Konstanten sind. Außerdem gilt für Leiter das ohmsche Gesetz

$$j = \sigma E.$$

Hier beschreibt σ die elektrische Leitfähigkeit des Materials in der Einheit $S m^{-1}$. Mit der Ladungserhaltung 1.4 und 5.1 folgt außerdem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot j \\ &= -\sigma \nabla \cdot E \\ &= -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho. \end{aligned}$$

Mit $\tau_\sigma = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ gilt also für die Ladungsdichte

$$\rho(r, t) = \rho(r, 0)e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}},$$

das heißt, dass die Ladungsdichte mit der Zeit gegen 0 konvergiert, wobei die Ladung schneller zerfällt, je größer die Leitfähigkeit des Materials ist. Dieser Effekt lässt sich damit erklären, dass die Ladung ein elektrisches Feld erzeugt, welches dafür sorgt, dass durch das ohmsche Gesetz ein Stromfluss entsteht. Die Elektronen werden hierbei an die Oberfläche des Volumens bewegt, da dort der größtmögliche Abstand zwischen den Elektronen erreicht werden kann. Die maximale Ladungsdichte, die ein Leiter so auf seiner Oberfläche aufnehmen kann, bezeichnet man mit ρ_S und die maximalen Flussdichte mit j_S . Mit der Ladungsdichte geht nun auch die Stromflussdichte im Inneren gegen 0, da weniger Ladung dazu führt, dass der entstehende Fluss auch geringer wird. Das ohmsche Gesetz lässt nun auch folgern, dass das elektrische Feld gegen 0 konvergiert. In einem theoretischen perfekten Leiter, das heißt ein Leiter mit $\sigma = \infty$, gilt also, dass im Inneren das elektrische Feld gleich 0 ist. Demnach werden elektromagnetische Wellen an der Oberfläche von perfekten Leitern vollständig reflektiert, da sie nicht ins Innere eindringen kann. Für perfekte Isolatoren, also $\sigma = 0$, leitet man analog zu den obigen Kapiteln her, dass sich elektromagnetische Wellen mit Geschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ohne Dispersion ausbreiten. Für alle anderen Fälle ($0 < \sigma < \infty$) beobachtet man Absorptionsphänomene von verschiedenen Materialien, die bestimmte Frequenzen absorbieren und Wellen dämpfen. Außerdem beobachtet man generell, dass sowohl ε und μ in der Realität frequenzabhängig sind, was die Analyse von Wellen in nicht perfekten Leitern und Isolatoren schwieriger macht. Dennoch sind die in diesem Kapitel hergeleiteten Ergebnisse ein guter Anfang, auf die die komplexeren Fälle aufbauen können.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Billingham, A. C. King: *Wave Motion*, Cambridge University Press, Kapitel 6.1–6.6.