Herleitung der modifizierten Wellengleichung mit Gravitation

Die Gravitation wirkt in negativer x-Richtung. Die Gravitationskraft pro Volumen ist daher

$$-\rho g \mathbf{e}_x.$$

Die Impulsgleichung lautet dann

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_x. \tag{1}$$

Im Grundzustand ist das Gas in Ruhe:

$$\mathbf{u} = 0, \qquad p = p_0(x), \qquad \rho = \rho_0(x).$$

Druck und Dichte hängen jetzt vom Ort ab.
Da der Grundzustand stationär ist, folgt aus (1)

$$0 = -\nabla p_0 - \rho_0 g \mathbf{e}_x.$$

Da alle Größen nur von x abhängen, ergibt sich

$$\frac{dp_0}{dx} = -\rho_0 g. \tag{2}$$

Nun betrachten wir kleine Störungen:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \qquad p = p_0(x) + \tilde{p}, \qquad \rho = \rho_0(x) + \tilde{\rho}.$$

Einsetzen in (1) liefert

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla(p_0 + \tilde{p}) - (\rho_0 + \tilde{\rho}) g \mathbf{e}_x.$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla p_0 - \nabla \tilde{p} - \rho_0 g \mathbf{e}_x - \tilde{\rho} g \mathbf{e}_x.$$

Mit

$$0 = -\nabla p_0 - \rho_0 g \mathbf{e}_x$$

bleibt

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} - \tilde{\rho} g \mathbf{e}_x.$$

Da $\tilde{\rho}$ klein ist, vernachlässigen wir Produkte kleiner Größen und erhalten

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} - \tilde{\rho} g \mathbf{e}_x. \tag{3}$$

Nun betrachten wir die Massenerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Nach Einsetzen der Störungen und Vernachlässigung von Produkten kleiner Größen ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\mathbf{u}}) = 0.$$

Ableiten nach der Zeit liefert

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right) = 0. \tag{4}$$

Setzen wir nun (3) in (4) ein:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \nabla \cdot (-\nabla \tilde{p} - \tilde{\rho} g \mathbf{e}_x) = 0.$$

Mit

$$\nabla \cdot (-\nabla \tilde{p}) = -\nabla^2 \tilde{p}$$

und

$$\nabla \cdot (-\tilde{\rho} g \mathbf{e}_x) = -g \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}$$

erhält man

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \nabla^2 \tilde{p} - g \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0.$$

also

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \nabla^2 \tilde{p} + g \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}. \tag{5}$$

Wir benutzen nun die Beziehung zwischen Druck- und Dichtestörung

$$\tilde{\rho} = \frac{d\rho}{dp}(p_0(x))\, \tilde{p}. \tag{10 aus den Folien}$$

Mit

$$c(x) := \left[\frac{d\rho}{dp}(p_0(x)) \right]^{-1/2}$$

folgt

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}}{c^2(x)}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2}. \tag{*}$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{p}}{c^2(x)} \right). \tag{**}$$

Setzt man (*) und (**) in (5) ein, erhält man

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \nabla^2 \tilde{p} + g \frac{d}{dx} \left(\frac{\tilde{p}}{c^2} \right)}$$

Dies ist die modifizierte Wellengleichung mit Gravitation.