

Herleitung der Energiegleichung

1 Herleitung der akustischen Energiegleichung

Ausgangspunkt ist die Impulsgleichung:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p.$$

Um die Energiegleichung zu erhalten, bilden wir ein Skalarprodukt mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p.$$

Damit folgt:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p.$$

Für den konvektiven Term verwenden wir die Vektoridentität

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

Daraus ergibt sich:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}).$$

Durch Einsetzen:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \left[\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right] = -\mathbf{u} \cdot \nabla p.$$

Da der Vektor $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ senkrecht zu \mathbf{u} steht, gilt

$$\mathbf{u} \cdot [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})] = 0.$$

So bleibt

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p.$$

Auch gilt:

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right).$$

Damit erhalten wir

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p.$$

Jetzt umschreiben wir die Terme. Für den ersten Term gilt:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Für den zweiten Term verwenden wir die Produktregel:

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}).$$

Auch der Druckterm wird mit der Produktregel umgeschrieben:

$$-\mathbf{u} \cdot \nabla p = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Massenerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Die beiden Terme

$$-\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$$

verschwinden, weil

$$-\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] = 0.$$

Damit bleibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) = -\nabla \cdot (p \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Die Divergenzterme können zusammengefasst werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \right] = p \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Nun wird $\nabla \cdot \mathbf{u}$ mithilfe der Kontinuitätsgleichung umgeschrieben. Aus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

folgt mit

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$$

die beziehung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right).$$

Das heißt:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right).$$

Die konvektive Ableitung ist definiert durch

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

Damit kann man schreiben:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Einsetzen in die Energiegleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \right] = -\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Wir bringen den rechten Term auf die linke Seite:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \left[\left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \right].$$

Nun integrieren wir über ein festes Volumen V mit Oberfläche S :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = - \int_V \nabla \cdot \left[\left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \right] dV.$$

Da das Volumen fest ist, kann die Zeitableitung vor das Integral gezogen werden:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = - \int_V \nabla \cdot \left[\left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \right] dV.$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

Wo \mathbf{n} ein äußerer Normalenvektor. ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = - \int_S \left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Dies ist die Energiegleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV + \int_V \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} dV = - \int_S \left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS} (*)$$

Der erste Term beschreibt die Änderung der kinetischen Energie. Der zweite Term beschreibt die Energie, die durch Kompression im Gas gespeichert wird. Die rechte Seite beschreibt die Arbeit der Druckkräfte auf der Oberfläche und den Fluss kinetischer Energie durch die Oberfläche.

Für kleine akustische Störungen schreiben wir

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad p = p_0 + \tilde{p}, \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}.$$

Erhält man aus der Energiegleichung zunächst

$$\int_V \frac{p_0}{\rho_0} \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} dV = - \int_S p_0 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Diese Gleichung entspricht im Wesentlichen der Massenerhaltung und enthält noch keine eigentliche Energieinformation über die Druckschwankungen. Dafür müssen Terme zweiter Ordnung in den kleinen Größen berücksichtigt werden.

Behält man die quadratischen Terme, erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{\mathbf{u}}|^2 dV + \int_V \frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} dV = - \int_S \tilde{p} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Der kinetische Energiefluss auf der rechten Seite von (*) erscheint hier nicht, weil er kubisch in kleinen Größen ist. Außerdem enthält die rechte Seite nur die Arbeit der Druckschwankung \tilde{p} , nicht die Arbeit des konstanten Hintergrunddrucks p_0 .

Aus der linearen akustischen Beziehung

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$$

folgt

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{c^2 \tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}.$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2 \right) = \frac{c^2 \tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t},$$

können wir schreiben:

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2 \right).$$

Mit

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}}{c^2}$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \tilde{\rho}^2 = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho_0} \left(\frac{\tilde{p}}{c^2} \right)^2 = \frac{\tilde{p}^2}{2c^2 \rho_0}.$$

Damit definieren wir die potentielle Kompressionsenergie pro Volumen:

$$U = \frac{\tilde{p}^2}{2c^2 \rho_0}.$$

Die kinetische Energie pro Volumen ist

$$K = \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{\mathbf{u}}|^2.$$

Außerdem definieren wir die akustische Intensität

$$\mathbf{I} = \tilde{p} \tilde{\mathbf{u}}.$$

Damit kann die Gleichung als

$$\frac{d}{dt} \int_V (K + U) dV = - \int_S \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} dS$$

geschrieben werden.

Diese Gleichung zeigt, dass die zeitliche Änderung der akustischen Energie in einem Volumen gleich dem negativen Energiefluss durch die Oberfläche ist.