Schallwellen I

Hauptseminar: Wellenphänomene

Areej Ghabayen

11.05.2026

Grundgleichungen

- Schallwellen sind kleine Störungen in einem kompressiblen Gas
- Beschreibung durch Erhaltung von Masse und Impuls:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{u}) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} + \mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{2}$$

- ρ: Gasdichte p: Gasdruck u: Gasgeschwindigkeit
- Annahme: keine Gravitation: $g = 0$, keine Viskosität: $\mu = 0$ und $\rho = \rho(p)$

Kleine Störungen

Wir betrachten eine kleine Störung eines ruhenden Grundzustands:

$$p = p_0 + \tilde{p} \tag{3}$$
$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \tag{4}$$
$$\mathrm{u} = \tilde{\mathrm{u}} \tag{5}$$

- Grundzustand: $p = p_0, \ \rho = \rho_0, \ \mathrm{u} = 0$
- $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathrm{u}}$: kleine Störungen
- **Ziel**: Linearisierung der Gleichungen

Linearisierung

Einsetzen in (1) und (2):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \big((\rho_0 + \tilde{\rho})\tilde{\mathrm{u}}\big) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{u}}}{\partial t} + \tilde{\mathrm{u}} \cdot \nabla \tilde{\mathrm{u}} = -\frac{1}{\rho_0 + \tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} \tag{7}$$

- $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathrm{u}} \ll 1$: Produkte kleiner Größen weden vernachlässigt.

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \tilde{\mathrm{u}} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathrm{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} \tag{9}$$

Herleitung der Wellengleichung

Taylor-Approximation:

$$\rho(p_0 + \tilde{p}) = \rho_0 + \tilde{\rho} \approx \rho(p_0) + \tilde{p}\,\frac{d\rho}{dp}(p_0)$$

Da $\rho_0 = \rho(p_0)$:

$$\tilde{\rho} = \frac{d\rho}{dp}(p_0)\,\tilde{p} \tag{10}$$

Einsetzen in Gleiching (8):

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dp}(p_0)\,\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\nabla \cdot \tilde{\mathrm{u}}$$

Ableiten nach der Zeit und Einsetzen in (9):

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dp}(p_0)\,\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\nabla^2 \tilde{p}$$

Definition der Schallgeschwindigkeit:

$$c := \left(\frac{d\rho}{dp}(p_0)\right)^{-1/2} \tag{11}$$

3D Wellengleichung:

$$\nabla^2 \tilde{p} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \tag{12}$$

Schallgeschwindigkeit in Luft

Ideales Gas:

$$p = \frac{RT}{m}\,\rho$$

Isotherme Annahme ($T =$ konstant):

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \approx 290\,\mathrm{m/s}$$

Problem:

- Experiment: $c \approx 340\,\mathrm{m/s}$
- Temperatur bleibt nicht konstant

Adiabatischer Fall:

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p_0}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}} \approx 340\,\mathrm{m/s}$$

Geschwindigkeitspotential

Idee: Einführung eines Potentials ϕ:

Da ρ_0 konstant ist, ist Gleichung(9): $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \right)$

Sei $\frac{\tilde{p}}{\rho_0} := -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}$ für Eine Funktion $\tilde{\phi}$

Durch Einsetzen und unter der Annahme $\tilde{u} = 0$ wenn $t = t_0$ ist:

$$\tilde{u} = \nabla \phi \tag{13}$$

wo $\phi = \tilde{\phi} - \tilde{\phi}(t_0)$

- ϕ heißt das **akustische Geschwindigkeitspotential**
- **Note:** $\nabla \times \tilde{u} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$, das heißt Akustische Störungen sind irrotational (wirbelfrei).

Geschwindigkeitspotential und Wellengleichung

ϕ hat eine Zusammenhang mit der Druckstörung: $\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$

Ableitung nach t: $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

Aus (10) $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp}(p_o)\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

Und da ũ $= \nabla\phi$, Einsezen in Gleichung (8) $\rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \nabla^2 \phi$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ Das Geschwindigkeitspotential erfüllt die 3D Wellengleichung.

Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \\ \tilde{\mathrm{u}} &= \nabla\phi \\ \tilde{p} &= -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} \end{aligned}}$$

Ebenenwellen

Der einfachste Lösungstyp der dreidimensionalen Wellengleichung ist eine Welle, die sich nur in x-Richtung ausbreitet.

In diesem Fall hat das Geschwindigkeitspotential die Form

$$\phi = f(x - ct)$$

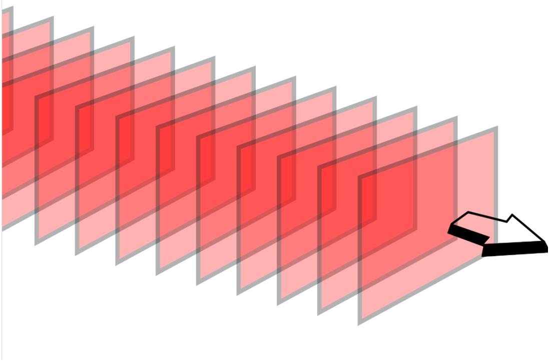
Für

$$x - ct = \text{konstant}$$

bleibt der Wert von ϕ konstant.

Die Form der Welle ändert sich also nicht, sondern bewegt sich nur mit Geschwindigkeit c nach rechts.

Die Welle heißt **Ebenenwelle**, weil ϕ, $\tilde{p}$ und $\tilde{u}$ auf Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung konstant sind.



Geschwindigkeit und Druck

Aus dem Geschwindigkeitspotential folgt:

$$\tilde{u} = f'(x - ct)$$

Für die Druckstörung gilt:

$$\tilde{p} = \rho_0 c f'(x - ct)$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\tilde{p} = \rho_0 c \tilde{u}}$$

Aussage: Druck und Geschwindigkeit sind proportional.

Longitudinale Wellen

Schallwellen sind longitudinal:

- Teilchenbewegung parallel zur Ausbreitungsrichtung
- Bewegung erfolgt in x-Richtung

Vergleich:

- Schallwellen $\rightarrow$ longitudinal
- Wellen auf einer gespannten Saite $\rightarrow$ transversal

Allgemeine Form:

$$f(\mathrm{k} \cdot \mathrm{x} - \omega t)$$

$$c = \frac{\omega}{|\mathrm{k}|}$$

Gültigkeit der Näherungen

Wir überprüfen die Gültigkeit der Annahmen:

- Vernachlässigung der konvektiven Beschleunigung
- Vernachlässigung der Viskosität
- Vernachlässigung der Gravitation

Impulsgleichung für eine Ebenenwelle:

$$\rho\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \rho\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \rho g$$

Vernachlässigung der konvektiven Beschleunigung

Damit die konvektive Beschleunigung vernachlässigt werden kann, muss gelten:

$$\rho \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \ll \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \text{ mit } \tilde{p} = \rho_0 c \tilde{u}$$

folgt:

$$|\tilde{u}| \ll c$$

Wir definieren die Mach-Zahl:

$$M = \frac{u_0}{c}$$

Für lineare Akustik gilt:

$$\boxed{M \ll 1}$$

$$u_0 = \text{typische Teilchengeschwindigkeit}$$

Vernachlässigung der Viskosität

Damit viskose Effekte klein bleiben, vergleichen wir den viskosen Term mit dem Druckterm:

$$\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

Für Wellenlänge λ muss gilten:

$$\frac{\mu|\tilde{u}|}{\lambda^2} \ll \frac{\rho_0 c|\tilde{u}|}{\lambda} \text{ Daraus folgt: } \lambda \gg \frac{\mu}{\rho_0 c}$$

Für Luft:

$$\frac{\mu}{\rho_0 c} \approx 3 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Hörbare Schallwellen besitzen deutlich größere Wellenlängen, daher kann die Viskosität meist vernachlässigt werden.

Vernachlässigung der Gravitation

Die Gravitation macht den Grundzustand ortsabhängig:

$$p_0 = p_0(x), \qquad \rho_0 = \rho_0(x)$$

Der Druck ändert sich mit der Höhe auf Grund der Gravitation:

$$\frac{dp_0}{dx} = -\rho_0 g$$

Dadurch erhält man eine modifizierte Wellengleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = \nabla^2 \tilde{p} + g\frac{d}{dx}\left(\frac{\tilde{p}}{c^2}\right)$$

Vergleich mit dem Wellenterme ergibt:

$$\lambda \ll \lambda_g, \qquad \lambda_g = \frac{c^2}{g} \approx 11\,\text{km}$$

Akustische Energieübertragung

Schallwellen transportieren Energie.

Die Energie besteht aus:

- kinetischer Energie
- potentieller Energie der Kompression

Druckkräfte verrichten Arbeit und übertragen dadurch Energie.

$$\frac{d}{dt}(\text{kinetische Energie} + \text{potentielle Energie}) = \text{Leistung der Druckkräfte}$$

Skalarprodukt der Impulsgleichung

Um eine Energiegleichung herzuleiten, multiplizieren wir die Impulsgleichung mit der Geschwindigkeit u.

$$\mathsf{u} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathsf{u}}{\partial t} + \rho \mathsf{u} \cdot \nabla \mathsf{u} \right) = -\mathsf{u} \cdot \nabla p$$

Anschließend verwenden wir Vektoridentitäten.

Kinetische Energie

Mit Vektoridentitäten erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathsf{u}|^2\right)-\frac{1}{2}|\mathsf{u}|^2\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}\rho|\mathsf{u}|^2\mathsf{u}\right)-\frac{1}{2}|\mathsf{u}|^2\nabla\cdot(\rho\mathsf{u}) = -\nabla\cdot(\mathsf{u}p)+p\nabla\cdot\mathsf{u}.$$

Der Term

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathsf{u}|^2\right)$$

beschreibt die Änderung der kinetischen Energie.

Kontinuitätsgleichung

Um die Energiegleichung weiter umzuschreiben, verwenden wir jetzt die Massenerhaltung ($\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathsf{u}) = 0$) gilt:

$$\nabla \cdot \mathsf{u} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathsf{u} \cdot \nabla \rho\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

Dabei ist

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathsf{u} \cdot \nabla$$

die konvektive Ableitung, sie beschreibt die Änderung entlang eines bewegten Fluidelements.

Damit erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|\mathrm{u}|^2\right)+\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=-\nabla\cdot\left\{\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathrm{u}|^2\right)\mathrm{u}\right\}$$

Durch Integration über ein Volumen V mit Oberfläche S erhält man die gesamte Energieerhaltung.

$$\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\rho|\mathrm{u}|^2dV+\int_V\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}dV=-\int_S\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathrm{u}|^2\right)\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}\,dS$$

n: Der äußere Normalvektor

Bedeutung der Energiegleichung

Die Gleichung beschreibt:

Änderungsrate von

(kinetischer Energie $+$ potentieller Kompressionsenergie)

$$=$$

Arbeit der Druckkräfte auf der Oberfläche + Fluss kinetischer Energie in das Volumen.

Potentielle Kompressionsenergie

Betrachte eine Gasmasse M mit kleinem Volumen- und Dichteunterschied:

$$M = \rho V = (\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V)$$

Da die Masse konstant bleibt, folgt:

$$\Delta V = -\frac{V \Delta\rho}{\rho}$$

Die bei der Kompression verrichtete Arbeit ist:

$$-p\Delta V = \frac{pV\Delta\rho}{\rho}$$

Damit ergibt sich für die zeitliche Änderung der Kompressionsenergie:

$$\int_V \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\, dV$$

Akustische Näherung

Für kleine Störungen gilt:

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \qquad p = p_0 + \tilde{p}, \qquad \mathrm{u} = \tilde{\mathrm{u}}$$

Unter Vernachlässigung höherer Ordnungen erhält man:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 |\tilde{\mathrm{u}}|^2 \, dV + \int_V \frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \, dV = - \int_S \tilde{p} \, \tilde{\mathrm{u}} \cdot \mathrm{n} \, dS$$

Damit betrachten wir nur die Energie der Druckschwankungen.

Energiegrößen

Mit

$$\tilde{p} = c^2 \tilde{\rho}$$

kann man schreiben:

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\tilde{p}^2}{2c^2 \rho_0} \right)$$

Damit erhält man:

$$\frac{d}{dt} \int_V (K + U) \, dV = - \int_S \mathrm{I} \cdot \mathrm{n} \, dS$$

Definitionen

$$K = \frac{1}{2}\rho_0|\tilde{\mathrm{u}}|^2$$

kinetische Energie pro Volumen

$$U = \frac{\tilde{p}^2}{2c^2\rho_0}$$

potentielle Kompressionsenergie pro Volumen

$$\mathrm{I} = \tilde{p}\,\tilde{\mathrm{u}}$$

akustische Intensität

Akustische Intensität und Lautstärke

Die akustische Intensität $\mathsf{I} = \tilde{p}\,\tilde{u}$ beschreibt den Energiefluss pro Fläche:

$$[\mathsf{I}] = \mathrm{W/m^2}$$

Große Intensität $\Rightarrow$ lauter Schall.

Das menschliche Ohr reagiert logarithmisch auf Schall:

$$L = 120 + 10\log_{10}|I|$$

Die Lautstärke wird in Dezibel "dB" gemessen

Die Hörschwelle liegt bei:

$$I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2} \rightarrow 0\mathrm{dB}$$

Energie ebener Schallwellen

Für ebene Schallwellen gilt:

$$K = U = \frac{1}{2}\rho_0 f'^2$$

Die gesamte Energiedichte ist:

$$K + U = \rho_0 f'^2 = \rho_0 \tilde{u}^2$$

Die akustische Intensität lautet:

$$I = \tilde{p}\tilde{u} = \rho_0 c \tilde{u}^2$$

Damit folgt:

$$\frac{\text{transportierte Energie pro Fläche}}{\text{Energie pro Volumen}} = \frac{\rho_0 c \tilde{u}^2}{\rho_0 \tilde{u}^2} = c$$

Die Energie breitet sich also mit der Schallgeschwindigkeit aus.

Take-Home Messages

- Schallwellen entstehen durch kleine Druck- und Dichteschwankungen, die zur linearen Wellengleichungführen:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- Schallwellen in Gasen sind longitudinal und irrotational.
- Ebene Wellen breiten sich mit konstanter Form und Schallgeschwindigkeit c aus.
- Die Energie einer Schallwelle besteht aus:

$$\text{kinetischer Energie} + \text{Kompressionsenergie}$$

- Die Energie breitet sich mit der Schallgeschwindigkeit aus
- Die akustische Intensität $\mathrm{I} = \tilde{p}\tilde{\mathrm{u}}$
  beschreibt den Energiefluss der Welle.
- Größere Intensität bedeutet lauteren Schall.