

# Wellen auf einer gespannten Saite

Hauptseminar: Wellenphänomene

Sabrina Taiber

Fachbereich Physik, Mathematik und Informatik (FB 08)  
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

20. April 2026

# Musikalische Grundlagen



Quelle: Freepik

Warum klingt derselbe Ton auf verschiedenen Instrumenten (oder bei anderer Spielweise) anders?

- ▶ **Anregungszustand:** Wo und wie wird die Saite gezupft?
- ▶ **Materialeigenschaften:** Dichte der Saite ( $\rho$ ) und wirkende Spannung ( $T$ )
- ▶ **Geometrie:** Die Länge der schwingenden Saite ( $L$ )
- ▶ **Spektrale Zusammensetzung:** Das Verhältnis von Grundton zu Oberschwingungen

# Musikalische Grundlagen

## Der Grundton ( $n = 1$ ):

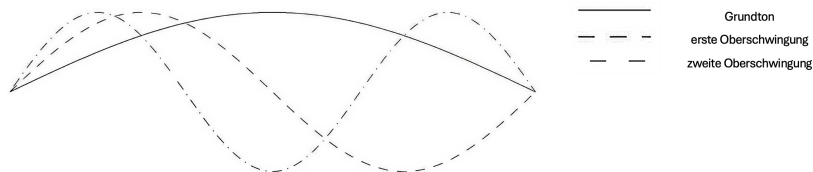
- ▶ Bestimmt die wahrgenommene Tonhöhe
- ▶ Die Saite schwingt in ihrer gesamten Länge als ein einziger Bogen

## Die Oberschwingungen ( $n > 1$ ):

- ▶ Zusätzliche Schwingungsmuster mit kürzeren Wellenlängen
- ▶ Klingen leiser mit und sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz

## Die Klangfarbe:

- ▶ Resultiert aus dem spezifischen Mischverhältnis aller mitschwingenden Oberschwingungen
- ▶ Wird maßgeblich durch die Anregung (Zupfstelle  $h$ ) beeinflusst



**Wir suchen eine mathematische Beschreibung für die Auslenkung  $y$  an jedem Ort  $x$  zu jedem Zeitpunkt  $t$ .**

**Das Ziel:**  $y(x, t)$

- ▶  $x \in [0, L]$  (Raum)
- ▶  $t \geq 0$  (Zeit)

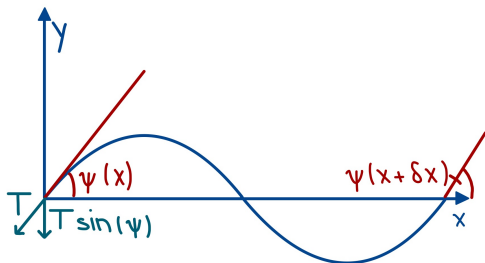
**Annahmen für das Modell:**

- ▶ Wir betrachten nur sehr kleine Auslenkungen ( $\frac{\partial y}{\partial x}$ )
- ▶ Homogene Längendichte  $\rho$
- ▶ Konstante Saitenspannung  $T$

# Physikalische Modellbildung

## Zentrale Formeln:

- ▶ Masse des Elements:  $\delta m = \rho \cdot \delta x$
- ▶ Vertikale Kraft:  $F_y = T \sin(\psi + \delta\psi) - T \sin(\psi)$
- ▶ Newton:  $F_y = \delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$



## Die geometrische Näherung:

Für  $\delta\psi \ll 1$  gilt:

$$\sin(\psi + \delta\psi) = \sin(\psi) \cos(\delta\psi) + \cos(\psi) \sin(\delta\psi) \approx \sin(\psi) + \cos(\psi)\delta\psi$$

## Die geometrische Näherung:

Für  $\delta\psi \ll 1$  gilt:

$$\sin(\psi + \delta\psi) = \sin(\psi) \cos(\delta\psi) + \cos(\psi) \sin(\delta\psi) \approx \sin(\psi) + \cos(\psi) \delta\psi$$

Damit gilt:

$$T \cos(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

## Die geometrische Näherung:

Für  $\delta\psi \ll 1$  gilt:

$$\sin(\psi + \delta\psi) = \sin(\psi) \cos(\delta\psi) + \cos(\psi) \sin(\delta\psi) \approx \sin(\psi) + \cos(\psi)\delta\psi$$

Damit gilt:

$$T \cos(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Für kleine Auslenkungen  $(\frac{\partial y}{\partial x})^2 \ll 1$  gilt:

$$\psi \approx \sin(\psi) \approx \tan(\psi) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

# Die Wellengleichung

**Resultierende Differentialgleichung:**

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

**Standardform der eindimensionalen-Wellengleichung:**

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

**Zusammenhang der Parameter:**

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad [\text{m/s}]$$

**Interpretation:**

- ▶  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  : Krümmung der Saite
- ▶  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  : Beschleunigung des Elements

# Der Separationsansatz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

**Der mathematische Ansatz (Trennung der Variablen):**

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

# Der Separationsansatz

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Der mathematische Ansatz (Trennung der Variablen):

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\kappa$$

Die Separationskonstante  $\kappa$ :

- ▶ Beide Seiten müssen gleich einer Konstante sein, da  $x$  und  $t$  unabhängig sind.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

**Der mathematische Ansatz (Trennung der Variablen):**

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

**Einsetzen in die Differentialgleichung:**

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\kappa$$

**Die Separationskonstante  $\kappa$ :**

- ▶ Beide Seiten müssen gleich einer Konstante sein, da  $x$  und  $t$  unabhängig sind.

**Resultierende gewöhnliche Differentialgleichungen:**

1.  $X''(x) + \kappa X(x) = 0$  (Ortsanteil)
2.  $T''(t) + \kappa c^2 T(t) = 0$  (Zeitanteil)

# Die Ortsgleichung und Randbedingungen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Wir betrachten zunächst die Ortsfunktion  $X(x)$ .

$$X''(x) + \kappa X(x) = 0$$

**Randbedingungen:**

$$X(0) = X(L) = 0$$

# Die Ortsgleichung und Randbedingungen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$X''(x) + \kappa X(x) = 0$$

Wir betrachten zunächst die Ortsfunktion  $X(x)$ .

**Randbedingungen:**

$$X(0) = X(L) = 0$$

**Lösung der Ortsgleichung:**

- ▶ Allgemeiner Ansatz:  $X(x) = A \sin(\sqrt{\kappa}x) + B \cos(\sqrt{\kappa}x)$
- ▶ Durch  $X(0) = 0$  folgt:  $B = 0$
- ▶ Durch  $X(L) = 0$  folgt:  $\sin(\sqrt{\kappa}L) = 0$
- ▶  $\sqrt{\kappa}L = n\pi \rightarrow \kappa_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  für  $n \in \mathbb{N}$

**Resultat:** Es existieren unendlich viele, diskrete Lösungen

$$X(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T''(t) + \kappa c^2 T(t) = 0$$

**Die Zeitgleichung:**

$$T''(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{L^2} T(t) = 0$$

**Lösung für  $T(t)$ :**

$$T(t) = \bar{F}_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \bar{G}_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

# Die Oberschwingungen

## Definition der $n$ -ten Oberschwingung:

$$y_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

## Zusammengeführte Gleichung:

$$y_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( F_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + G_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)$$

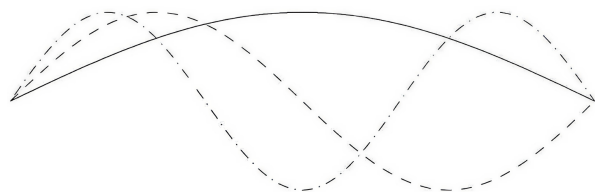
mit  $F_n = A_n \bar{F}_n$  und  $G_n = A_n \bar{G}_n$

## Physikalische Eigenschaften:

- ▶ **Ortsfaktor:** Bestimmt die Form
- ▶ **Zeitfaktor:** Bestimmt die Dynamik
- ▶ Stehende Welle: Die Knotenpunkte verändern ihre Position über die Zeit nicht.

# Die Oberschwingungen

$$y_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( F_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + G_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)$$



— Grundton  
- - - erste Oberschwingung  
- · - zweite Oberschwingung

Quelle: Billingham & King (2000), S. 22

# Das Superpositionsprinzip

## Linearität der Wellengleichung:

- ▶ Jede Summe von Lösungen ist wieder eine Lösung.

## Die allgemeine Gesamtlösung:

$$\begin{aligned}y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( F_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + G_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)\end{aligned}$$

# Die Anfangsbedingungen

Es gelten die Anfangsbedingungen:

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$$

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

# Bestimmung der Koeffizienten

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

## Orthogonalität der Sinusfunktion

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

# Bestimmung der Koeffizienten

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

## Orthogonalität der Sinusfunktion

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

## Bestimmung von $G_m$ :

$$G_m = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

# Bestimmung der Koeffizienten

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

## Orthogonalität der Sinusfunktion

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \end{cases}$$

## Bestimmung von $G_m$ :

$$G_m = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

## Bestimmung von $F_m$ :

$$F_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

# Beispiel - Die ideal gezupfte Saite

$$G_m = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$F_m = \frac{2}{m\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

**Zupfen an der Stelle  $h$  mit Amplitude  $a$ .**

► Es gilt:

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{a}{h}x & 0 \leq x \leq h \\ \frac{a}{L-h}(L-x) & h \leq x \leq L \end{cases}, \quad v_0 = 0$$

► Randbedingungen:

$$y_0(0) = y_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$$

# Beispiel - Die ideal gezupfte Saite

- ▶ Das Integral für  $G_m$ :

$$G_m = \frac{2aL^2}{h(L-h)m^2\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi h}{L}\right)$$

- ▶ Das Integral für  $F_m$ :

$$F_m = 0$$

# Beispiel - Die ideal gezupfte Saite

**Die Gesamtlösung für den Zupfprozess:**

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

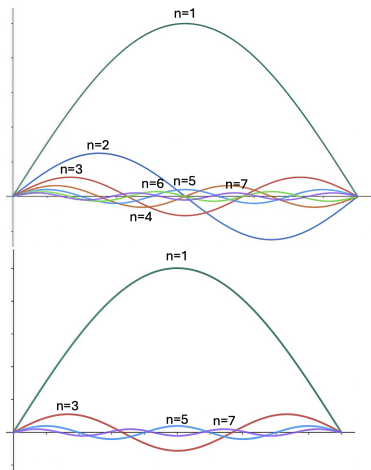
**Eingesetzter Koeffizient  $G_n$ :**

$$y(x, t) = \frac{2aL^2}{h(L-h)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

# Beispiel - Die ideal gezupfte Saite

## Zentrale Erkenntnisse:

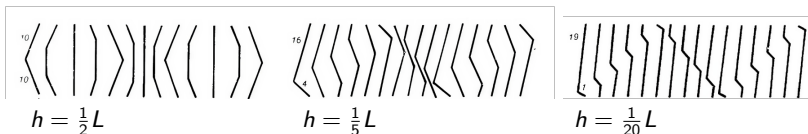
- ▶  $h$  entscheidet, welche Oberschwingungen angeregt werden
- ▶ Amplituden nehmen mit  $\frac{1}{n^2}$  ab, der Grundton dominiert physikalisch immer



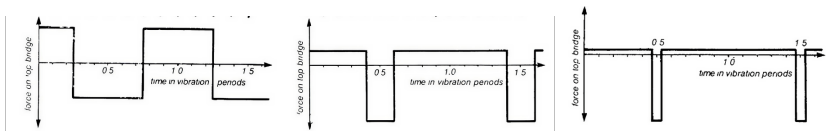
# Experimentelle Ergebnisse

Eine Saite wird bei  $h = \frac{1}{2}L$ ,  $h = \frac{1}{5}L$  oder  $h = \frac{1}{20}L$  ausgelenkt.

► Es ergeben sich folgende Dreiecksformen:

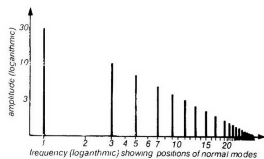


► Die Kraft, die am Steg übertragen wird ist:



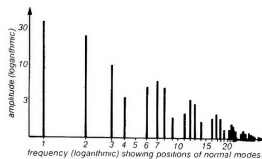
Quelle: Billingham & King (2000), S. 24

# Experimentelle Ergebnisse

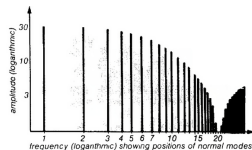


$$h = \frac{1}{2}L$$

Quelle: Billingham & King (2000), S. 24



$$h = \frac{1}{5}L$$



$$h = \frac{1}{20}L$$

Relative Amplituden  $|G_n|$  aufgetragen über die Ordnung  $n$ .

Die Zupfposition wirkt als geometrischer Filter.

# Energie der schwingenden Saite

## Kinetische Energie

- ▶ Energie der schwingenden Masse
- ▶ Formel:  $\delta K = \frac{1}{2} \delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} (\rho \delta x) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$
- ▶ Gesamt:  $K(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$

## Potentielle Energie

- ▶ Energie durch die Dehnung gegen die Saitenspannung  $T$
- ▶ Formel:  $\delta V = T(\delta s - \delta x) = T \left( \delta x \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - \delta x \right) \approx \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \delta x$
- ▶ Gesamt:  $V(t) = \frac{1}{2} T \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$

**Gesamtenergie:**  $E(t) = K(t) + V(t)$

# Energie der $n$ -ten Oberschwingung

Einsetzen der Schwingungsgleichung in die Energiegleichungen ergibt:

$$K_n = \frac{\rho n^2 \pi^2 c^2}{4L} \left( F_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) - G_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)^2$$

$$V_n = \frac{\rho n^2 \pi^2 c^2}{4L} \left( F_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + G_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right)^2$$

mit  $R_n = n\sqrt{F_n^2 + G_n^2}$ ,  $\kappa_n = \tan^{-1}\left(\frac{G_n}{F_n}\right)$  gilt:

$$K_n(t) = \frac{\rho \pi^2 c^2}{4L} R_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi ct}{L} + \kappa_n\right),$$

$$V_n(t) = \frac{\rho \pi^2 c^2}{4L} R_n^2 \cos^2\left(\frac{n\pi ct}{L} + \kappa_n\right)$$

# Energie der $n$ -ten Oberschwingung

Die Zeitmittelwerte der Energie sind:

$$\bar{K}_n = \bar{V}_n = \frac{\rho\pi^2 c^2}{8L} R_n^2$$

wegen

$$\begin{aligned} & \frac{nc}{2L} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{nc}} \sin^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \kappa_n \right) dt \\ &= \frac{nc}{2L} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2L}{nc}} \cos^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \kappa_n \right) dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für  $E_n(t)$  gilt nun:

$$E_n = \frac{\rho\pi^2 c^2}{4L} R_n^2$$

# Die Unabhängigkeit der Oberschwingungen

$$K(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

**Das mathematische Fundament:**

$$V(t) = \frac{1}{2} T \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

**Die physikalische Konsequenz:**

- ▶ Die Gesamtenergie ist die reine Summe der Einzelenergien:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

- ▶ Kein Energieaustausch
- ▶ Stabilität des Klages

## Die Physik der Saite: Das Wichtigste auf einen Blick

### 1. Die Wellengleichung:

- ▶ Bildet das physikalische Fundament
- ▶ Verknüpft die räumliche Krümmung mit der zeitlichen Beschleunigung

### 2. Die Rolle der Geometrie:

- ▶ Die Zupfposition  $h$  fungiert als geometrischer Filter
- ▶ Sie bestimmt über die Koeffizienten  $G_n$ , welche Obertöne den Klang charakterisieren

### 3. Energie & Unabhängigkeit

- ▶ Durch die Orthogonalität des Sinus schwingt jede Oberschwingung energetisch autark
- ▶ Der Gesamtsound ist eine stabile Superposition dieser Einzelzustände

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Fragen und Diskussion

**Literaturgrundlage:**

J. Billingham und A. C. King:  
*Wave Motion*, Cambridge University Press, 2000.