Lineare Wasserwellen

Wave Motion Seminar

Patrick Rossel

June 1, 2026

Johannes Gutenberg-Universität

Zitat

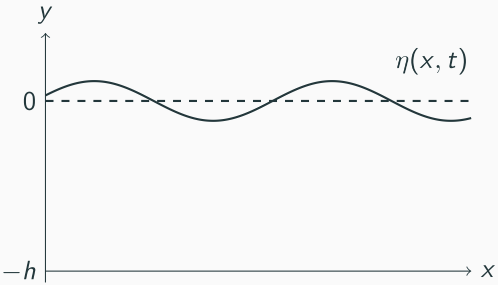
Physics is just $F = ma$ in different variants. - Unbekannt

Mein Zitat

Waves are just $a \sin x$ in different variants. - Patrick Rossel

Formal Model

1. Freie Oberfläche
2. Starrer Boden bei $y = -h$
3. nicht komprimierbar
4. konstante Dichte ρ
5. laminare Wellen
6. reibungsfrei



Erhaltungsgleichungen

Sei u die Geschwindigkeit, dann gelten

$$\text{Massenerhaltungssatz:} \qquad \nabla \cdot u = 0 \tag{1}$$

$$\text{Impulserhaltungssatz:} \qquad \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u}_{= \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla p + g}_{= \frac{F_{\mathrm{vol}}}{\rho}} . \tag{2}$$

Differentialgleichung

Angenommen u ist wirbellos, d.h. $\operatorname{rot} u := \nabla \times u = 0$, nach dem Lemma von Poincaré ist u ein Gradientenfeld, also $u = \nabla \phi$. Um nun (2) zu vereinfachen nutzen wir die Identität

$$u \times (\nabla \times u) = \nabla \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right) - (u \cdot \nabla) u.$$

Da $\operatorname{rot} u = 0$ erhält man

$$(u \cdot \nabla) u = \nabla \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right).$$

Die Gravitation zeigt in Richtung $-y$, somit setzen wir

$$g \mapsto -\nabla(gy).$$

Aufgrund der Linearität von ∇ erhalten wir die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \text{Laplace Gleichung:} \qquad & \Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0 \\ \text{Impulserhaltungssatz:} \qquad & \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{p}{\rho} + gy \right) = 0. \end{aligned}$$

Bernoulli Gleichung

Schließlich haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{p}{\rho} + gy = C(t).$$

O.B.d.A sei $C(t) = 0$, denn wir können translatieren

$$\phi \mapsto \phi + \int_0^t C(s)\,\mathrm{d}s.$$

Damit gelangen wir zur

$$\text{Bernoulli Gleichung:} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + \frac{p}{\rho} + gy = 0.$$

Randbedingungen

Wir nehmen einen 2d Fluss an und o.B.d.A. sei $p_{\mathrm{atm}} = 0$.

1. Setzen wir den Randwert in die Bernoulli Gleichung ein, erhalten wir die **dynamische Randbedingung bei der freien Oberfläche**
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi + g\eta = 0 \quad \text{bei } y = \eta(x,t).$$
2. Ein Fluidteilchen auf der Oberfläche bleibt dort, das heißt
$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(y - \eta(x,t)) := -\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1\right)$$
das nennen wir die **kinematische Randbedingung bei der freien Oberfläche**
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{bei } y = \eta(x,t).$$
3. Kein Wasser verlässt den Boden oder tritt dort hinein, das nenne wir die **Boden Bedingung**
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{bei } y = -h.$$

Linearisierte Randbedingungen

Wir nehmen nun an, dass die Amplitude deutlich kleiner als die Wellenlänge $a \ll \lambda$ ist. Damit erhalten wir die neuen linearisierten Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
\text{Laplace Gleichung: } & \nabla^2 \phi = 0 \\
\text{Bernoulli Gleichung: } & \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{bei } y = 0 \\
\text{Kinematische Bedingung: } & \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{bei } y = 0 \\
\text{Boden Bedingung: } & \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{bei } y = -h.
\end{aligned}
$$

Lösungen der Differentialgleichung I

Wir suchen nach einer Lösung mit horizontalen und vertikalen Komponenten

$$\phi(x, y, t) = F(x - ct)Y(y)$$

Mit der Laplace Bedingung gilt somit

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F''Y + FY'' = 0$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, setzt man

$$\frac{F''}{F} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2.$$

Nun erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} F &= A\cos(k(x - ct)) + B\sin(k(x - ct)) \\ Y &= C\mathrm{e}^{ky} + D\mathrm{e}^{-ky}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung II

Einsetzen der Boden Bedingung liefert

$$k\left(C\mathrm{e}^{ky} - D\mathrm{e}^{-ky}\right) = 0 \quad \text{bei } y = -h.$$

und damit

$$C = D\mathrm{e}^{2kh}.$$

Wir können nun Y vereinfachen vermittels

$$Y = C\mathrm{e}^{ky} + D\mathrm{e}^{-ky} = D\mathrm{e}^{2kh}\mathrm{e}^{ky} + D\mathrm{e}^{-ky} = D\mathrm{e}^{kh}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{k(y+h)} + \mathrm{e}^{-k(y+h)}\right)}_{=2\cosh(k(y+h))}.$$

Nun definiere[1]

$$\overline{D} := 2D\mathrm{e}^{kh}; \quad \overline{A} = A\overline{D}; \quad \overline{B} = B\overline{D}$$

damit erhalten wir

$$\phi(x,y,t) = \cosh(k(y+h))\left(\overline{A}\cos(k(x-ct)) + \overline{B}\sin(k(x-ct))\right).$$

[1] Bemerkung: Das Skript hat einen Fehler, dort ist $\overline{A} = 2A\overline{D}$ and $B = 2B\overline{D}$.

Wellengeschwindigkeit

Vermittels der Bernoulli Gleichung und kinematischen Bedingung wissen wir

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{bei } y = 0.$$

Mit unseren vorherigen Lösung erhalten wir

$$\left(-k^2c^2\cosh(kh) + gk\sinh(kh)\right)\left(\overline{A}\cos(k(x-ct)) + \overline{B}\sin(k(x-ct))\right) = 0.$$

Da die Gleichung für alle x und t gelten muss, folgt sofort

$$\begin{aligned} & 0 = -k^2c^2\cosh(kh) + gk\sinh(kh) \\ \iff \quad & c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh) \\ \overset{\lambda = \frac{2\pi}{k}}{\iff} \quad & c = \pm\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \end{aligned}$$

Und für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ gilt:

$$\omega^2 = \frac{2\pi g}{\lambda}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) = gk\tanh(kh).$$

Tiefes und flaches Wasser

1. Im flachen Wasser ist $h \ll \lambda$ and dadurch

$$c^2 \sim gh.$$

2. Im tiefen Wasser ist $h \gg \lambda$ und somit

$$c^2 \sim \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Amplitude

O.B.d.A. setzen wir $\overline{A} = 0$, da $a \sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta + \psi)$, nun

$$\phi(x, y, t) = \overline{B}\cosh(k(y + h))\sin(k(x - ct)).$$

Mit der Bernoulli Gleichung ist das

$$\eta(x, t) = \frac{kc}{g}\overline{B}\cosh(kh)\cos(k(x - ct)),$$

also ist unsere Amplitude

$$\begin{aligned} a :&= \frac{kc}{g}\overline{B}\cosh(kh)) \\ \eta(x, y, t) &= a\cos(k(x - ct)) \\ c^2 &= \frac{g}{k}\tanh(kh) \\ \phi(x, y, t) &= \frac{ag}{kc\cosh(kh)}\cosh(k(y + h))\sin(k(x - ct)). \end{aligned}$$

Annahme Linearität

Wir haben bei der Linearisierung einige Terme ignoriert. Nun verifizieren wir, dass diese Vereinfachung begründet war. In der kinematischen Randbedingung vernachlässigten wir

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} \in \mathcal{O}\left(\frac{a^2 g k}{c}\right),$$

während der folgende Term erhalten blieb.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \in \mathcal{O}(ack).$$

Das ist gerechtfertigt, wenn

$$\frac{a^2 g k}{c} \ll ack \iff ag \ll c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh) \iff ak \ll \tanh(kh).$$

Wobei wir unterscheiden zwischen

- Flachen Wasser $\tanh(kh) \approx kh$ and $ak \ll kh \iff a \ll h$.
- Tiefen Wasser $\tanh(kh) \approx 1$ and $ak = \frac{2\pi a}{\lambda} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1$.

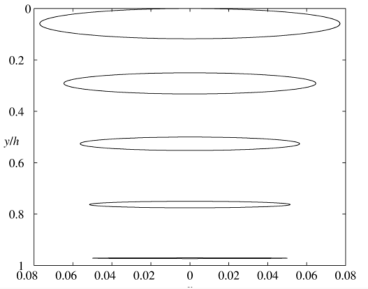
Elliptische Kurvenbahnen

Sei $(x, y) = (X_0 + X_1(t), Y_0 + Y_1(t))$ die Position eines Partikels, für kleine $|X_1(t)| \ll X_0, |Y_1(t)| \ll Y_0$ erhält man

$$\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}(X_0, Y_0) = \frac{ag}{c\cosh(kh)}\cosh(k(Y_0+h))\cos(k(X_0-ct)),$$
$$\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\phi}{\partial y}(X_0, Y_0) = \frac{ag}{c\cosh(kh)}\sinh(k(Y_0+h))\sin(k(X_0-ct)).$$

Also

$$X_1(t) = \hat{x}\sin\theta;\ Y_1(t) = \hat{y}\cos(\theta).$$



Energie I

Wir können nun die Energie pro Einheits horizontaler Länge bestimmen

$$\text{Kinetische Energiedichte} = \int_{-h}^{0} \frac{1}{2}\rho|\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}y$$

$$\text{Potentielle Energiedichte} = \int_{0}^{\eta} \rho g y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho g \eta^2.$$

Außerdem können wir die durchschnittliche Energiedichte pro Wellenlänge bestimmen

$$\text{Durchschnittliche kinetische Energiedichte} = \frac{\rho}{2\lambda}\int_0^{\lambda}\int_{-h}^{0} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =: \overline{K}$$

$$\text{Durchschnittliche potentielle Energiedichte} = \frac{\rho g}{2\lambda}\int_0^{\lambda} \eta^2 \,\mathrm{d}x =: \overline{V}.$$

Weil $\int \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{\sin(2nx)}{4n} + C$, liefert das Integral

$$\overline{K} = \overline{V} := \frac{\rho g}{2\lambda}\int_0^{\lambda} \eta^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\rho g a^2}{2\lambda}\int_0^{\lambda} \cos^2(k(x-ct))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\rho g a^2.$$

Energie II

Setze $z := k(y+h)$ und $\theta := k(x-ct)$ um nun zu berechnen

$$\begin{aligned}
\overline{K} &= \frac{\rho}{2\lambda}\int_0^\lambda \int_{-h}^0 |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\rho}{2\lambda}\int_0^\lambda \int_{-h}^0 \left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 (\cosh^2(z)\cos^2(\theta)+\sinh^2(z)\sin^2(\theta))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{\rho}{2\lambda}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \int_{-h}^0 \int_0^\lambda (\cosh^2(z)\cos^2(\theta)+\sinh^2(z)\sin^2(\theta))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\rho}{2\lambda}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \frac{\lambda}{2}\int_{-h}^0 (\cosh^2(z)+\sinh^2(z))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Identität}}{=} \frac{\rho}{4}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \int_{-h}^0 \cosh(2z)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\rho}{4}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \frac{1}{k}\int_0^{kh} \cosh(2z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\rho}{4}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \frac{1}{2k}\sinh(2kh)
\end{aligned}$$

Energie III

Wir nutzen die Identität

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

nun erhalten wir hiermit

$$\begin{aligned}\overline{K} =& \frac{\rho}{4}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \frac{1}{2k}\sinh(2kh) \\ =& \frac{\rho}{4k}\left(\frac{ag}{c\cosh(kh)}\right)^2 \sinh(kh)\cosh(kh) \\ =& \frac{1}{4}\rho g a^2 \cdot \frac{g}{c^2 k}\frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)}.\end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun sofort aus

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh).$$

Energiefluss

Der durchschnittliche Energiefluss ist die Leistung pro Einheitsbreite, also die Energiemenge die pro Sekunde durch die vertikale Ebene transportiert wird. Unter der Linearitätsannahme ist die kinetische Energie vernachlässigbar klein, damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E_F :=& \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^{0} p \frac{\partial \phi}{\partial x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \\
\overset{\text{Bernoulli Gleichung}}{=}& \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^{0} \left(p_{\text{atm}} - \rho g y - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Weil

$$
\int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, \mathrm{d}t \propto \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \cos(k(x - ct)) \, \mathrm{d}t = 0,
$$

folgt somit

$$
E_F = -\frac{\rho \omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t.
$$

Energiefluss II

Wir haben die Ableitungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{ac^2 k}{\sinh(kh)} \cosh(k(y+h)) \cos(k(x-ct)),$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{ack}{\sinh(kh)} \cosh(k(y+h)) \cos(k(x-ct)).$$

Und vermittels Fubini lässt sich das Integral tauschen, außerdem ist der Durchschnitt von $\cos^2\theta$ über die gesamte Welle $\frac{1}{2}$, damit erhalten wir

$$\begin{aligned} E_F &= -\frac{\rho\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} \int_{-h}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t \\ &= \rho \int_{-h}^{0} \frac{a^2 c^3 k^2}{2 \sinh^2(kh)} \cosh^2(k(y+h)) \, \mathrm{d}y. \\ &\overset{\star}{=} \frac{\rho a^2 1 k^2 c^3}{4 \sinh^2(kh)} \left(h + \frac{\sinh(2hk)}{2k} \right) \end{aligned}$$

Die Gleichheit $\star$ gilt wegen

$$\int \cosh^2(kx) \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sinh(2kx)}{4k} + C.$$

Energiefluss III

Sei U die horizontale Geschwindigkeit und τ eine Zeit. Die Ernegie in $U\tau$ wird in der Zeit τ transportiert. Da wir bereits die Energiedichte ausgerechnet haben, wissen wir, dass

$$U\tau(\overline{K} + \overline{V}) := U\tau H$$

Die transportierte Energie muss per Definition gleich $E_F\tau$ sein, damit erhalten wir

$$U = \frac{E_F}{H} = \frac{E_F}{\rho g a^2}$$

Vermittels algebraischer Umformungen erhält man schließlich

$$U = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right).$$

Das bedeutet, dass die Energie sich in Flussgeschwindigkeit $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ bewegt.

Zusammenfassung

Wir können nun die wichtigsten Erkenntnisse und Eigenschaften kurz zusammenfassen

$$
\begin{aligned}
a :&= \frac{kc}{g}\overline{B}\cosh(kh)) \\
\eta(x, y, t) &= a\cos(k(x - ct)) \\
c^2 &= \frac{g}{k}\tanh(kh) \\
\phi(x, y, t) &= \frac{ag}{kc\cosh(kh)}\cosh(k(y + h))\sin(k(x - ct))
\end{aligned}
$$

Außerdem haben wir gesehen, dass wir pro horizontaler Längeneinheit eine Energiedichte von

$$H = \frac{1}{2}\rho g a^2$$

haben.

Fragen?

References i

J. Billingham, A. C. King.
Wave Motion.
Cambridge University Press, 2000.