

Wellen in elastischen Festkörpern

Hauptseminar Wellenphänomene

Felix Isenburg

08. Juni 2026

Zusammenfassung

Das Thema dieser Ausarbeitung sind Wellen in elastischen Festkörpern. Die Auswirkungen solcher Wellen sind uns beispielsweise durch die Deformation der Erdoberfläche nach einem Erdbeben bekannt. Da die Größe der elastischen Deformation im Vergleich zum Festkörper bei diesen Phänomenen gering ist, können wir diese Wellenphänomene linear approximieren.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
2 Wellen in einem unendlichen elastischen Körper	3
3 Zweidimensionale Wellen in halbumendlichen elastischen Körpern	5

1 Einführung

Nachfolgend betrachten wir einen *idealen elastischen Körper*. Darunter verstehen wir ein lineares und isotropes Verhältnis zwischen Dehnung und Spannung im Körper sowie die Tatsache, dass die Wellenbewegung keine Temperaturänderung und keinen Wärmefluss im Körper verursacht. Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes des Körpers nach einer elastischen Deformation. Diesen können wir schreiben als Summe $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ aus dem Ortsvektor des Punktes vor der Deformation $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ und dem zugehörigen Verschiebevektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Schreiben wir die Komponenten des Verschiebevektors $\mathbf{u}$ als $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, so gibt u_i die i -te Komponente der Verschiebung des Materials am Ort $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zum Zeitpunkt t an. Der Bruch $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ gibt die Änderung der i -ten Komponente des Verschiebevektors an, wenn sich der betrachtete Punkt minimal in der j -ten Komponente ändert. Diese Änderung ist die Summe des *Dehnungstensors* $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ und des *Rotationstensors* $r_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$. Der Dehnungstensor ist symmetrisch ($e_{ij} = e_{ji}$) und misst, wie ein beliebig kleines Körperelement gedehnt oder zusammen gedrückt wird, ohne dass es rotiert. Der Rotationstensor ist dagegen antisymmetrisch ($r_{ij} = -r_{ji}$) und misst, wie sich ein beliebig kleines Körperelement dreht, ohne dass es seine Form verändert. Die drei Komponenten des Rotationstensors sind unabhängig voneinander und bilden zusammen den *Rotationsvektor* $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, wobei $r_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}r_{ij}$. Ausgeschrieben ist dieser gegeben durch

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_{23} \\ r_{31} \\ r_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_{32} \\ r_{13} \\ r_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} \\ u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann der Rotationsvektor berechnet werden als

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} \\ u_{1,3} - u_{3,1} \\ u_{2,1} - u_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Die Volumenänderung eines beliebig kleinen Körperelements durch die Deformation bezeichnen wir als *Dilatation*. Sie wird berechnet als

$$\Delta = e_{kk} = \sum_{k=1}^3 e_{kk} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Das Verhältnis zwischen Dehnung und Spannung im Körper kann nun durch den *symmetrischen Spannungstensor*

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

ausgedrückt werden, wobei λ und μ die *Lamé-Konstanten* sind. Für diese Konstanten gelten die Zusammenhänge

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

zwischen dem *Elastizitätsmodul* E und der *Poissonzahl* ν . Diese Größen beschreiben das Ausmaß der elastischen Deformation des Körpers durch Einwirkung einer äußeren Kraft. Für Stahl sind die typischen Werte $E_{\text{Stahl}} \approx 200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ und $\nu_{\text{Stahl}} \approx 0,26$. Die Lamé-Konstanten sind dann

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Stahl}} &\approx \frac{200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,26}{(1+0,26) \cdot (1-2 \cdot 0,26)} \approx 8,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad \text{und} \\ \mu_{\text{Stahl}} &\approx \frac{200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2 \cdot (1+0,26)} \approx 7,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

Kleine Deformationen eines elastischen Körpers können durch die Bewegungsgleichungen

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

beschrieben werden, wobei ρ die *ungestörte Dichte* bezeichnet, also die Dichte des Körpers im Ruhezustand, bevor dieser durch eine Welle beeinflusst wird. Hierbei gehen wir davon aus, dass im Körper selbst keine Kräfte wirken, welche die Wellenausbreitung im Allgemeinen jedoch nicht beeinflussen würden. Einsetzen von Gleichung 1 in Gleichung 2 ergibt unter Verwendung der Ableitungsregeln und dem Einsetzen der Formeln der Dilatation und des Dehnungstensors

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij})}{\partial x_j} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \lambda \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Alternativ kann Gleichung 3 in Vektorform geschrieben werden, als *Navier-Gleichung*

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4)$$

und bildet die Grundlage für unsere weitere Beschäftigung mit Wellen in elastischen Körpern.

2 Wellen in einem unendlichen elastischen Körper

In einem unendlichen elastischen Körper gibt es keine Grenzflächen, wodurch sich die Mathematik stark vereinfacht. Mit der Identität $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ ist Gleichung 4 von der Form

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \} \\ &= (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5)$$

Da $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ für jedes differenzierbare Vektorfeld F und da die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht werden kann, ist die *Divergenz* von Gleichung 5 gegeben durch

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (6)$$

Durch Umstellen von Gleichung 6 erfüllt die Dilatation $\Delta = \nabla \cdot \mathbf{u}$

$$\nabla^2 \Delta = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (7)$$

Die Volumenänderungen im elastischen Körper lösen somit die dreidimensionale Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ und werden als *Primärwellen* bezeichnet.

Da $\nabla \times \nabla(\nabla \cdot F) = 0$ für jedes differenzierbare Vektorfeld F und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen wieder vertauscht werden kann, ist die *Rotation* von Gleichung 5 gegeben durch

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{u}) = -\mu \nabla \times \{ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \}. \quad (8)$$

Verwenden wir nun, dass $\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla \cdot \mathbf{r} = 0$ wegen $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, so erhalten wir aus Gleichung 8 mit der obigen Identität

$$\nabla^2 \mathbf{r} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (9)$$

Die beliebig kleinen Rotationen im Körper lösen somit die dreidimensionale Wellengleichung mit der Geschwindigkeit $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$. Wegen $c_1 > c_2$ liegen diese Wellen hinter den Primärwellen und werden daher auch als *Sekundärwellen* bezeichnet.

Betrachten wir die obigen Wellen in einem begrenzten Abschnitt, so liegen die Geschwindigkeiten dieser Wellen bei Stahl mit einer Dichte von $\rho_{\text{Stahl}} \approx 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beispielsweise bei

$$\begin{aligned} c_{1, \text{Stahl}} &\approx \sqrt{\frac{8,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 2 \cdot 7,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 5600 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \\ c_{2, \text{Stahl}} &\approx \sqrt{\frac{7,9 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} \approx 3180 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Die Werte sind damit deutlich größer als die Schallgeschwindigkeit in Luft mit nur etwa $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

In den folgenden beiden Unterabschnitten untersuchen wir zwei einfache Lösungen der obigen Gleichungen 7 und 9 in einem unendlichen elastischen Körper.

2.1 Eindimensionale Dilatationswellen

Wir betrachten zuerst Wellen, die nur in einer Dimension schwingen und sich in dieselbe Richtung ausbreiten. Hierfür setzen wir $u_1 = u_1(x_1, t)$ und $u_2 = u_3 = 0$. Folglich sind $\Delta = \partial u_1 / \partial x_1$ und $\mathbf{r} = 0$. Die Dilatation Δ erfüllt somit die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$$

mit der obigen Geschwindigkeit $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ (siehe Gleichung 7). Da bei diesen Wellen die Schwingungsrichtung mit der Ausbreitungsrichtung übereinstimmt, werden sie als *Longitudinalwellen* bezeichnet. Auch wenn die Dilatation eindimensional schwingt, besitzt der symmetrische Spannungstensor die drei nicht-trivialen Komponenten

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda e_{kk} \delta_{11} + 2\mu e_{11} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ \sigma_{22} &= \lambda e_{kk} \delta_{22} + 2\mu e_{22} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \sigma_{33} = \lambda e_{kk} \delta_{33} + 2\mu e_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Ein typisches Beispiel für Longitudinalwellen sind Schallwellen.

2.2 Eindimensionale Rotationswellen

Schwingen die Wellen nur in einer Dimension, breiten sich jedoch senkrecht dazu aus, sind also beispielsweise $u_2 = u_2(x_1, t)$ und $u_1 = u_3 = 0$, so folgen daraus $\Delta = 0$ und $\mathbf{r} = (0, 0, \frac{1}{2} \partial u_2 / \partial x_1)$. Dann erfüllt die dritte Komponente des Rotationsvektors r_3 die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 r_3}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 r_3}{\partial t^2}$$

mit der Geschwindigkeit $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ (siehe Gleichung 9). Da bei diesen Wellen die Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht, werden sie als *Transversalwellen* bezeichnet. Die nicht-trivialen Komponenten des symmetrischen Spannungstensors sind hier

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \sigma_{21} = 2\mu e_{21} = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Ein typisches Beispiel für Transversalwellen sind die Schwingungen einer Saite. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 1 die Auslenkungsrichtungen bei Longitudinal- und Transversalwellen.

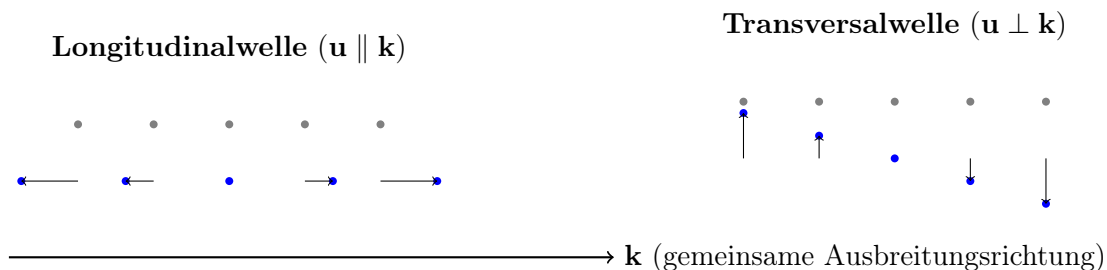


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Auslenkung $\mathbf{u}$ relativ zur Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k}$ für Longitudinal- und Transversalwellen. Graue Punkte zeigen die Gleichgewichtslage, blaue Punkte die ausgelenkte Lage. Veränderte Darstellung nach [1, S. 134].

2.3 Ebene Wellen mit allgemeiner Orientierung

Wir möchten nun eine Lösung der Navier-Gleichung 4 von der Form $\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$ bestimmen, wobei $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ und $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Eine solche Lösung ist konstant auf jeder Ebene $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{konstant}$ und beschreibt somit eine *ebene Welle* mit Amplitude $\mathbf{A}$, die sich in Richtung $\mathbf{k}$ bewegt. Die zugehörige Phasengeschwindigkeit ist $c = \omega/|\mathbf{k}|$ und ergibt sich durch Ableiten der Phase $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{konstant}$ nach der Zeit t :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = 0 \implies \mathbf{k} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{=\mathbf{c}} = \omega \xrightarrow{c \parallel \mathbf{k}} \mathbf{c} = c \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \implies c = |\mathbf{c}| = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

Wir setzen den ebenen Wellenansatz $\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$ in die Navier-Gleichung 4 ein. Für diesen Ansatz gelten

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \mathbf{u} = -|\mathbf{k}|^2 \mathbf{u}.$$

Für $\Phi = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ ergibt sich außerdem

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \nabla \exp(\Phi)) = \nabla(i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) \exp(\Phi)) = i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) \cdot i\mathbf{k} \exp(\Phi) = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \exp(\Phi).$$

Einsetzen in die Navier-Gleichung 4 liefert

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \iff \rho \{-\omega^2 \mathbf{A} \exp(\Phi)\} &= (\lambda + \mu) \{-(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \exp(\Phi)\} + \mu \{-|\mathbf{k}|^2 \mathbf{A} \exp(\Phi)\}. \end{aligned}$$

Da $\exp(\Phi) \neq 0$ für alle $\mathbf{x}$ und alle t , folgt daraus

$$\rho \omega^2 \mathbf{A} = (\lambda + \mu)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} + \mu |\mathbf{k}|^2 \mathbf{A}. \quad (10)$$

Bilden wir davon das Skalarprodukt mit $\mathbf{k}$ und formen um, so erhalten wir

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})(\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu)|\mathbf{k}|^2) = 0. \quad (11)$$

Die obige Gleichung 11 ist zum einen erfüllt, wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$. Dann steht die Schwingungsrichtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, folglich liegen rotationale bzw. transversale Wellen vor. Aus Gleichung 10 folgt dann, dass $\omega = \pm \sqrt{\mu/\rho} \cdot |\mathbf{k}|$. Zum anderen ist Gleichung 11 dann erfüllt, wenn $\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu)|\mathbf{k}|^2$. In diesem Fall ist $\omega = \pm \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \cdot |\mathbf{k}|$. Setzen wir dies in Gleichung 10 ein, erhalten wir $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}/|\mathbf{k}|^2$, folglich stimmen Schwingungsrichtung und Ausbreitungsrichtung überein, somit sind diese Wellen dilatational bzw. longitudinal.

Da die Navier-Gleichung homogen und linear ist, wird sie von allen Linearkombinationen der beiden obigen Lösungen gelöst. Im Allgemeinen können dreidimensionale elastische ebene Wellen somit als Überlagerung eines dilatationalen und eines rotationalen Anteils dargestellt werden.

3 Zweidimensionale Wellen in halbumendlichen elastischen Körpern

Seien nun $-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 \leq 0$ und $-\infty < x_3 < \infty$ gegeben. Dies definiert einen halbumendlichen elastischen Körper mit Oberfläche $x_2 = 0$, welche physikalisch unterschiedlich belastet sein kann und dadurch verschiedene Randbedingungen erlaubt. Unabhängig davon, ob die Oberfläche senkrecht belastet oder unbelastet ist, ergeben $u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$ und $u_3 = 0$ eine zweidimensionale Lösung.

3.1 Senkrecht belastete Oberfläche

Wir betrachten eine Normalkraft $p(t)$, die ab dem Zeitpunkt $t = 0$ auf der Oberfläche $x_2 = 0$ wirkt. Aufgrund der Translationssymmetrie in x_1 - und x_3 -Richtung betrachten wir die eindimensionale Deformation $\mathbf{u} = (0, u_2(x_2, t), 0)$. In Unterabschnitt 2.1 haben wir bereits gesehen, dass sich die Navier-Gleichung 4 dann zu einer eindimensionalen Wellengleichung mit Geschwindigkeit c_1 reduziert. Der symmetrische Spannungstensor auf der Fläche $x_2 = 0$ besitzt die Komponenten

$$\sigma_{22}(0, t) = -p(t)H(t) \quad \text{und} \quad \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0. \quad (12)$$

Da die Wellen an der Oberfläche $x_2 = 0$ entstehen und dies die einzige Grenzfläche des halbumendlichen Körpers ist, gibt es keine reflektierten Wellen, sondern nur solche, die in den halbumendlichen Körper hineinlaufen. Somit ist u_2 von der Form

$$u_2(x_2, t) = f(x_2 + c_1 t) = f\left(c_1 \left(t + \frac{x_2}{c_1}\right)\right) = F\left(t + \frac{x_2}{c_1}\right). \quad (13)$$

Mit den Ergebnissen aus Unterabschnitt 2.1 und Gleichung 13 folgen

$$\sigma_{22}(x_2, t) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{c_1} F'\left(t + \frac{x_2}{c_1}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_{12} = \sigma_{32} = 0. \quad (14)$$

Gleichsetzen der nicht-trivialen Komponenten in den Gleichungen 12 und 14 ergibt für $x_2 = 0$

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{c_1} F'(t) = -p(t)H(t). \quad (15)$$

Umformen und Integrieren von Gleichung 15 führt zu

$$F(t) = \frac{-c_1 H(t)}{(\lambda + 2\mu)} \int_0^t p(s) ds, \quad (16)$$

wobei wir die Konstante zu Null setzen, da wir davon ausgehen, dass der elastische Körper sich nicht translativ bewegt. Setzen wir Gleichung 16 in 13 und Gleichung 15 in 14 ein, erhalten wir

$$u_2(x_2, t) = \frac{-c_1}{(\lambda + 2\mu)} H\left(t + \frac{x_2}{c_1}\right) \int_0^{t + \frac{x_2}{c_1}} p(s) ds \quad \text{und} \\ \sigma_{22}(x_2, t) = -p\left(t + \frac{x_2}{c_1}\right) H\left(t + \frac{x_2}{c_1}\right).$$

Für $x_2 < -c_1 t$ verschwinden sowohl die Verschiebung u_2 als auch die Spannung σ_{22} . Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2 der halbumendliche elastische Körper mit den Randbedingungen auf der Oberfläche $x_2 = 0$ dargestellt.

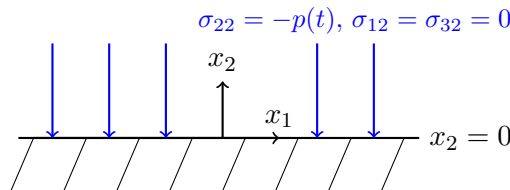


Abbildung 2: Halbumendlicher elastischer Körper mit Grenzfläche $x_2 = 0$ unter einer senkrecht nach unten wirkenden Oberflächenlast. Veränderte Darstellung nach [1, S. 136].

3.2 Unbelastete Oberfläche

Wenn die Oberfläche $x_2 = 0$ weder senkrecht belastet wird noch eine Scherspannung vorliegt, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten für eine Wellenausbreitung. Die erste Möglichkeit besteht darin, dass sich die Welle nur in x_1 -Richtung ausbreitet. Solch eine Welle muss relativ nahe an der Grenzfläche liegen, um physikalisch möglich zu sein, so wie in Abbildung 3. Die zweite Möglichkeit besteht in einer ebenen harmonischen Welle und ihren Reflexionen.

3.2.1 Abgedämpfte Wellen, die sich entlang der unbelasteten Oberfläche ausbreiten

Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Deformation im halbumendlichen elastischen Körper erzeugt wird. Nach mehreren vergangenen Deformationen kann es passieren, dass für längere Zeit eine Welle zustande kommt, die sich entlang der Grenzfläche $x_2 = 0$ ausbreitet. Es ist davon auszugehen, dass eine solche Welle in x_2 -Richtung gedämpft wird. Wir suchen eine Lösung der Navier-Gleichung 4, die diese Bedingungen berücksichtigt, also eine Lösung der Form

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp(i(kx_1 - \omega t) + \alpha x_2) + \mathbf{B} \exp(i(kx_1 - \omega t) + \beta x_2). \quad (17)$$

Hierbei sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ die Amplituden sowie α und β die Abklingraten der Welle, die aus einem Rotationsanteil (Transversalwelle) und einem Dilatationsanteil (Longitudinalwelle) besteht.

Wegen der Linearität der Navier-Gleichung 4 genügt es, die beiden Summanden des Ansatzes aus Gleichung 17 getrennt zu betrachten und separat in die Navier-Gleichung 4 einzusetzen. Sei hierzu $\mathbf{u} = \mathbf{C} \exp(W(\gamma))$, wobei $\mathbf{C} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$, $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ und $W(\gamma) = i(kx_1 - \omega t) + \gamma x_2$. Definieren wir außerdem $\mathbf{s} = (ik, \gamma)$, so gelten

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \mathbf{u} = |\mathbf{s}|^2 \mathbf{u}.$$

Wegen $\nabla \exp(W(\gamma)) = \mathbf{s} \exp(W(\gamma))$ ergibt sich außerdem

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla((\mathbf{C} \cdot \mathbf{s}) \exp(W(\gamma))) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{s}) \nabla \exp(W(\gamma)) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} \exp(W(\gamma)).$$

Einsetzen in die Navier-Gleichung 4 liefert

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \iff \rho \{-\omega^2 \mathbf{C} \exp(W(\gamma))\} &= (\lambda + \mu) \{(\mathbf{C} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} \exp(W(\gamma))\} + \mu \{|\mathbf{s}|^2 \mathbf{C} \exp(W(\gamma))\}. \end{aligned}$$

Da $\exp(W(\gamma)) \neq 0$ für (x_1, x_2, t) , kann durch den Exponentialfaktor dividiert werden, somit ist

$$-\rho \omega^2 \mathbf{C} = (\lambda + \mu)(\mathbf{C} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} + \mu |\mathbf{s}|^2 \mathbf{C}. \quad (18)$$

Wie in Unterabschnitt 2.3 finden wir eine Lösung, wenn $\mathbf{C} \cdot \mathbf{s} = 0$ oder $\mathbf{C} \parallel \mathbf{s}$. Im ersten Fall liegt eine rotationale bzw. transversale Welle vor. Für $\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = 0$ erhalten wir

$$A_1 = -\alpha A, \quad A_2 = ikA \quad \text{und} \quad \omega^2 = c_2^2(k^2 - \alpha^2). \quad (19)$$

Im zweiten Fall erhalten wir analog für den dilatationalen bzw. longitudinalen Anteil

$$\omega^2 = c_1^2(k^2 - \beta^2). \quad (20)$$

Per Superpositionsprinzip erhalten wir damit für die Verschiebung $\mathbf{u}$ den Ansatz

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0) = A(-\alpha, ik) \exp(W(\alpha)) + (B_1, B_2) \exp(W(\beta)).$$

Die Komponenten σ_{12} und σ_{22} des symmetrischen Spannungstensors berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= 2\mu e_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ &= \mu \{ -\alpha^2 A \exp(W(\alpha)) + (ik)^2 A \exp(W(\alpha)) + \beta B_1 \exp(W(\beta)) + ik B_2 \exp(W(\beta)) \} \\ &= \mu \{ -A(k^2 + \alpha^2) \exp(W(\alpha)) + (\beta B_1 + ik B_2) \exp(W(\beta)) \}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \lambda e_{kk} \delta_{22} + 2\mu e_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \lambda \{ ik B_1 \exp(W(\beta)) + \beta B_2 \exp(W(\beta)) \} + 2\mu \{ \alpha A ik \exp(W(\alpha)) + \beta B_2 \exp(W(\beta)) \} \\ &= \lambda (ik B_1 + \beta B_2) \exp(W(\beta)) + 2\mu \{ \alpha A ik \exp(W(\alpha)) + \beta B_2 \exp(W(\beta)) \}.\end{aligned}$$

Da wir die unbelastete Oberfläche $x_2 = 0$ betrachten, erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}-A(k^2 + \alpha^2) + (\beta B_1 + ik B_2) &= 0 \quad \text{und} \\ \lambda ik B_1 + (\lambda + 2\mu) \beta B_2 + 2\mu \alpha ik A &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Wir haben nun insgesamt die sechs Gleichungen 19, 20 und 21 für die neun Unbekannten ω , k , α , β , A , A_1 , A_2 , B_1 und B_2 . Dies gibt uns eine große Anzahl von Wellen. Um diese einzuschränken, müssen wir eine weitere Annahme über die Amplitude $\mathbf{B}$ machen. Wählen wir $\beta B_1 = ik B_2$, so gilt $(B_1, B_2) \parallel (ik, \beta)$, also $\mathbf{B} \parallel \mathbf{s}$. Damit reduzieren sich die Gleichungen aus Gleichung 21 zu

$$\begin{aligned}-(\alpha^2 + k^2)A + 2ik B_2 &= 0 \quad \text{und} \\ 2\mu \alpha ik A + \left\{ \beta(\lambda + 2\mu) - \frac{\lambda k^2}{\beta} \right\} B_2 &= 0.\end{aligned}$$

Für eine nicht-triviale Lösung dieser Gleichungen benötigen wir, dass

$$\det \begin{pmatrix} -(\alpha^2 + k^2) & 2ik \\ 2\mu \alpha ik & \beta(\lambda + 2\mu) - \lambda k^2 / \beta \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ist äquivalent ist zu

$$(\alpha^2 + k^2)(\beta^2(\lambda + 2\mu) - \lambda k^2) - 4k^2 \mu \alpha \beta = 0$$

oder

$$(\alpha^2 + k^2)^2 \left\{ \beta^2 \frac{c_1^2}{c_2^2} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) k^2 \right\}^2 = 16k^4 \alpha^2 \beta^2,\tag{22}$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} > 2.$$

Aus den Gleichungen 19 und 20 folgen

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \quad \text{und} \quad \beta^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2},$$

wodurch sich Gleichung 22 vereinfacht zu

$$\begin{aligned}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} + k^2 \right)^2 \left\{ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \frac{c_1^2}{c_2^2} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) k^2 \right\}^2 &= 16k^4 \left(1 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \\ \iff \left(2 - \frac{\omega^2}{c_2^2 k^2} \right)^4 &= 16 \left\{ 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \left(\frac{\omega^2}{c_2^2 k^2} \right) \right\} \left(1 - \frac{\omega^2}{c_2^2 k^2} \right).\end{aligned}$$

Setzen wir $X := \omega^2/c_2^2 k^2$, so erhalten wir daraus schließlich

$$\begin{aligned}
 (2 - X)^4 &= 16 \left\{ 1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 X \right\} (1 - X) \\
 \Leftrightarrow X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 32X + 16 &= 16 - 16X - 16 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 X + 16 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 X^2 \quad (23) \\
 \Leftrightarrow X^3 - 8X^2 &= 16 \left\{ 1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right\} - \left\{ 24 - 16 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right\} X.
 \end{aligned}$$

Wegen $c_1 > c_2$ sind beide geschweifte Klammern von Gleichung 23 positiv. Das kubische Polynom auf der linken Seite und die Gerade auf der rechten Seite schneiden sich im Reellen genau an einer Stelle $X = X_1$. Vom Vorzeichen beider Seiten der Gleichung 23 bei $X = 0$ und $X = 1$ folgt $0 < X_1 < 1$. Daraus folgt $\omega = \pm \sqrt{X_1} c_2 k$. Die Phasengeschwindigkeit $c_R = \omega/k = \pm \sqrt{X_1} c_2$ ist kleiner als jene von Rotationswellen und hängt lediglich von λ , μ und ρ ab, nicht jedoch von der Wellenfrequenz oder der Wellenlänge. Solche Wellen werden auch als *Rayleighwellen* bezeichnet und finden vor allem Anwendung in der Seismologie und der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 3 die Ausbreitung einer Rayleighwelle entlang der freien Oberfläche $x_2 = 0$ des halbunendlichen elastischen Körpers und ihre Dämpfung in Tiefenrichtung.

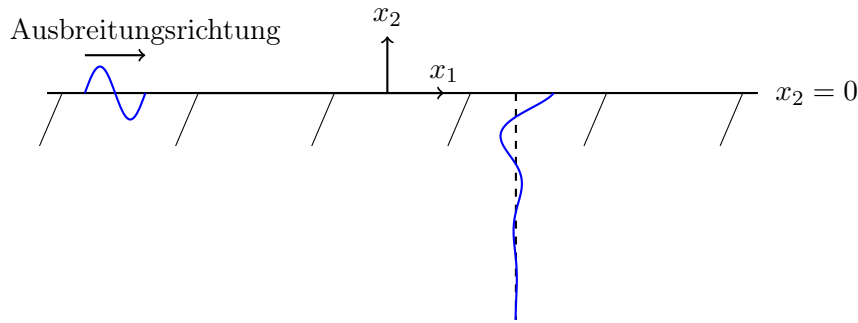


Abbildung 3: Schematische Darstellung einer Rayleighwelle auf der freien Oberfläche $x_2 = 0$. Die Welle breitet sich entlang der Grenzfläche in x_1 -Richtung aus und klingt mit zunehmender Tiefe ab. Veränderte Darstellung nach [1, S. 137].

3.2.2 Die Reflexion von ebenen Wellen auf einer unbelasteten Oberfläche

In Abschnitt 2 haben wir gesehen, dass ebene elastische Wellen in einem unendlichen Körper im Allgemeinen sowohl einen dilatationalen als auch einen rotationalen Anteil besitzen. Wenn eine rein dilatationale bzw. rotationale Welle auf eine unbelastete ebene Oberfläche trifft, kann die davon reflektierte Welle vom selben Typ, vom anderen Typ oder eine Kombination der beiden Typen sein. Betrachten wir hierfür eine Dilatationswelle E mit Amplitude A_E , die im Winkel θ_E auf die unbelastete Oberfläche trifft. Die davon reflektierte Welle umfasst dann einen dilatationalen Anteil D mit Amplitude A_D und Reflexionswinkel θ_D sowie einen rotationalen Anteil R mit Amplitude A_R und Reflexionswinkel θ_R . Um dies weiter untersuchen zu können, zerlegen wir unsere Verschiebung $\mathbf{u}$ im Folgenden in eine eintreffende und zwei reflektierte Komponenten:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^E + \mathbf{u}^D + \mathbf{u}^R. \quad (24)$$

Da die Amplitude der Dilatationswellen mit Geschwindigkeit c_1 parallel zum Wellenvektor ist und die Amplitude der Rotationswellen mit Geschwindigkeit c_2 senkrecht zum Wellenvektor steht,

sind diese Komponenten gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^E &= A_E(\sin \theta_E, \cos \theta_E) \exp(ik_E(x_1 \sin \theta_E + x_2 \cos \theta_E - c_1 t)), \\ \mathbf{u}^D &= A_D(\sin \theta_D, -\cos \theta_D) \exp(ik_D(x_1 \sin \theta_D - x_2 \cos \theta_D - c_1 t)) \quad \text{und} \\ \mathbf{u}^R &= A_R(\cos \theta_R, \sin \theta_R) \exp(ik_R(x_1 \sin \theta_R - x_2 \cos \theta_R - c_2 t)).\end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 4 die einfallende Dilatationswelle E sowie die an der freien Oberfläche $x_2 = 0$ reflektierten dilatationalen und rotationalen Wellen D und R dargestellt.

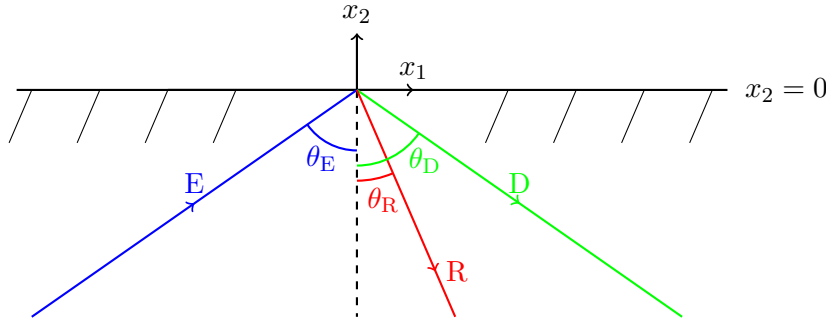


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Reflexion der einfallenden Dilatationswelle E an der freien Oberfläche $x_2 = 0$. Die reflektierte Welle umfasst einen dilatationalen Anteil D sowie einen rotationalen Anteil R. Veränderte Darstellung nach [1, S. 141].

Beim Berechnen des symmetrischen Spannungstensors unter Beachtung der Randbedingungen würden drei verschiedene Exponentialfaktoren vorkommen. Da auf der Oberfläche $x_2 = 0$ keine Spannung vorliegen soll, muss jeder dieser Faktoren gleich sein, also

$$k_E c_1 \left(\frac{x_1 \sin \theta_E}{c_1} - t \right) = k_D c_1 \left(\frac{x_1 \sin \theta_D}{c_1} - t \right) = k_R c_2 \left(\frac{x_1 \sin \theta_R}{c_2} - t \right)$$

gelten. Dies kann jedoch nur für alle (x_1, t) erfüllt sein, wenn $k_E c_1 = k_D c_1 = k_R c_2$, wenn also alle drei Wellen die gleiche Winkelfrequenz besitzen, und wenn

$$\frac{x_1 \sin \theta_E}{c_1} = \frac{x_1 \sin \theta_D}{c_1} = \frac{x_1 \sin \theta_R}{c_2}.$$

Daraus folgt direkt, dass der Einfallswinkel θ_E und der Reflexionswinkel der Dilatationswelle θ_D gleich sind. Für den Reflexionswinkel der Rotationswelle θ_R folgt

$$\sin \theta_R = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_E,$$

also $0 \leq \theta_R \leq \theta_E$ wegen $0 < c_2/c_1 < 1$. Damit kann die Verschiebung $\mathbf{u}$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= A_E(\sin \theta_E, \cos \theta_E) \exp\left(i\omega \left(\frac{x_1 \sin \theta_E + x_2 \cos \theta_E}{c_1} - t \right)\right) \\ &\quad + A_D(\sin \theta_E, -\cos \theta_E) \exp\left(i\omega \left(\frac{x_1 \sin \theta_E - x_2 \cos \theta_E}{c_1} - t \right)\right) \\ &\quad + A_R(\cos \theta_R, \sin \theta_R) \exp\left(i\omega \left(\frac{x_1 \sin \theta_R - x_2 \cos \theta_R}{c_2} - t \right)\right).\end{aligned}\tag{25}$$

Die Komponenten σ_{12} und σ_{22} des symmetrischen Spannungstensors auf der Oberfläche $x_2 = 0$ berechnen sich aus Gleichung 25 unter Verwendung der Identitäten

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \quad \text{und} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

zu

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= 2\mu e_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ &= \mu i\omega \left(\frac{A_E(2 \sin \theta_E \cos \theta_E)}{c_1} - \frac{A_D(2 \sin \theta_E \cos \theta_E)}{c_1} - \frac{A_R(\cos^2 \theta_R - \sin^2 \theta_R)}{c_2} \right) \exp(\Omega_E) \\ &= \mu i\omega \left(\frac{A_E \sin 2\theta_E}{c_1} - \frac{A_D \sin 2\theta_E}{c_1} - \frac{A_R \cos 2\theta_R}{c_2} \right) \exp(\Omega_E) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \lambda e_{kk} \delta_{22} + 2\mu e_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ &= \lambda i\omega \left(\frac{A_E(\sin^2 \theta_E + \cos^2 \theta_E)}{c_1} + \frac{A_D(\sin^2 \theta_E + \cos^2 \theta_E)}{c_1} \right) \exp(\Omega_E) \\ &\quad + 2\mu i\omega \left(\frac{A_E \cos^2 \theta_E}{c_1} + \frac{A_D \cos^2 \theta_E}{c_1} - \frac{A_R \sin \theta_R \cos \theta_R}{c_2} \right) \exp(\Omega_E) \\ &= \lambda i\omega \left(\frac{A_E + A_D}{c_1} \right) \exp(\Omega_E) + 2\mu i\omega \left((A_E + A_D) \frac{\cos^2 \theta_E}{c_1} - A_R \frac{\sin 2\theta_R}{2c_2} \right) \exp(\Omega_E), \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_E = i\omega \left(\frac{x_1 \sin \theta_E}{c_1} - t \right).$$

Ist die Amplitude A_E der eintreffenden Welle bekannt, so können wir aus den obigen Gleichungen aufgrund der Spannungsfreiheit folgern, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_D}{A_E} \right) \frac{\sin 2\theta_E}{c_1} + \left(\frac{A_R}{A_E} \right) \frac{\cos 2\theta_R}{c_2} &= \frac{\sin 2\theta_E}{c_1} \quad \text{und} \\ \left(\frac{A_D}{A_E} \right) \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_E}{c_1} - \left(\frac{A_R}{A_E} \right) \frac{\mu \sin 2\theta_R}{c_2} &= -\frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_E}{c_1}. \end{aligned} \tag{26}$$

Die obigen Gleichungen 26 zeigen, dass A_D/A_E und A_R/A_E reelle Koeffizienten sind. Daraus folgt wegen der gleichen Winkelfrequenz ω , dass die reflektierten Wellen beide entweder gleichphasig oder genau gegenphasig zu der eintreffenden Welle schwingen.

Konventionen

- Über doppelt auftretende Indizes wird aufsummiert (*Einsteinsche Summenkonvention*).
- Das *Kronecker-Delta* ist definiert als

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

- Das *Levi-Civita-Symbol* ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Der *Nabla-Operator* ist definiert als

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}.$$

- Die *Heaviside-Funktion* ist definiert als

$$H(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ 1, & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$

Literatur

[1] J. Billingham and A. C. King. *Wave Motion*. Cambridge University Press, 2000.

Abbildungsverzeichnis

- | | | |
|---|---|----|
| 1 | Schematische Darstellung der Auslenkung $\mathbf{u}$ relativ zur Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k}$ für Longitudinal- und Transversalwellen. Graue Punkte zeigen die Gleichgewichtslage, blaue Punkte die ausgelenkte Lage. Veränderte Darstellung nach [1, S. 134]. . . . | 4 |
| 2 | Halbunendlicher elastischer Körper mit Grenzfläche $x_2 = 0$ unter einer senkrecht nach unten wirkenden Oberflächenlast. Veränderte Darstellung nach [1, S. 136]. . | 6 |
| 3 | Schematische Darstellung einer Rayleighwelle auf der freien Oberfläche $x_2 = 0$. Die Welle breitet sich entlang der Grenzfläche in x_1 -Richtung aus und klingt mit zunehmender Tiefe ab. Veränderte Darstellung nach [1, S. 137]. | 9 |
| 4 | Schematische Darstellung der Reflexion der einfallenden Dilatationswelle E an der freien Oberfläche $x_2 = 0$. Die reflektierte Welle umfasst einen dilatationalen Anteil D sowie einen rotationalen Anteil R. Veränderte Darstellung nach [1, S. 141]. . . | 10 |

Anhang

Im Folgenden widmen wir uns den Aufgaben 5.1 und 5.2 aus [1] (siehe [1, S. 168f.]).

Aufgabe 5.1

Wir betrachten eine Sphäre aus elastischem Material mit dem Radius a , die in der Frequenz ω schwingt. Gegeben sei die Verschiebung $\mathbf{u} = (u(r, t), 0, 0)$, wobei r den Abstand vom Mittelpunkt der Sphäre bezeichnet.

- (a) Wir zeigen, dass das Material auf der Sphäre longitudinal schwingt, d.h. dass $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ gilt. Da die Verschiebung rein radial erfolgt, besitzt das Verschiebungsfeld in Kugelkoordinaten nur eine radiale Komponente und kann daher geschrieben werden als $\mathbf{u} = u(r, t)\mathbf{e}_r$. Mit

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

folgt

$$\mathbf{u} = \frac{u(r, t)}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $f := f(r, t) = u(r, t)/r$, so ergibt sich für die Rotation

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times u(r, t) \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \underbrace{\frac{u(r, t)}{r}}_{=:f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(fz) - \frac{\partial}{\partial z}(fy) \\ \frac{\partial}{\partial z}(fx) - \frac{\partial}{\partial x}(fz) \\ \frac{\partial}{\partial x}(fy) - \frac{\partial}{\partial y}(fx) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} \\ x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x} \\ y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \\ x \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \\ y \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \frac{df}{dr} \frac{y}{r} - y \frac{df}{dr} \frac{z}{r} \\ x \frac{df}{dr} \frac{z}{r} - z \frac{df}{dr} \frac{x}{r} \\ y \frac{df}{dr} \frac{x}{r} - x \frac{df}{dr} \frac{y}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen, dass sich die Navier-Gleichung 4 in diesem Fall zu der skalaren Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right)$$

reduziert. Mit Gleichung 5 aus Abschnitt 2 folgt wegen $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, dass

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (27)$$

Mit den Konventionen der vorherigen Teilaufgabe ergibt sich für die Divergenz

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot u(r, t) \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{u(r, t)}{r}}_{=:f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) + \frac{\partial}{\partial z}(fz).$$

Mit der Produktregel folgt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = x \frac{\partial f}{\partial x} + f + y \frac{\partial f}{\partial y} + f + z \frac{\partial f}{\partial z} + f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + 3f.$$

Da $f = f(r, t)$ nur von r abhängt, folgt weiter mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= x \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} + 3f \\ &= x \frac{df}{dr} \frac{x}{r} + y \frac{df}{dr} \frac{y}{r} + z \frac{df}{dr} \frac{z}{r} + 3f \\ &= \frac{df}{dr} \underbrace{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}}_{=:r^2/r=r} + 3f = \frac{df}{dr} r + 3f.\end{aligned}$$

Einsetzen von $f = u/r$ ergibt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + 3 \frac{u}{r} = r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + 3 \frac{u}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} + 3 \frac{u}{r} = \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r}.$$

Umformen ergibt

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + 2ru \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u).$$

Setzen wir dies in Gleichung 27 ein, so erhalten wir schließlich

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right) \iff \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{=:c_1^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right). \quad (28)$$

- (c) Wir zeigen, dass der Ansatz $u = U(r)e^{-i\omega t} = (d\phi/dr)e^{-i\omega t}$ zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -k^2 \phi \quad (29)$$

führt, wobei $k = \omega/c_1$. Setzen wir $u(r, t) = U(r)e^{-i\omega t}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 U e^{-i\omega t}.$$

Sei weiter $U = d\phi/dr$. Da $e^{-i\omega t} \neq 0$ gilt, können wir nach dem Einsetzen in Gleichung 28 durch $e^{-i\omega t}$ dividieren und erhalten

$$-\omega^2 \frac{d\phi}{dr} = c_1^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \right) \iff \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \right) + \underbrace{\frac{\omega^2}{c_1^2}}_{=:k^2} \frac{d\phi}{dr} = 0.$$

Also ist

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) + k^2 \phi \right] = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) + k^2 \phi = C. \quad (30)$$

Da das Verschiebungsfeld nur von $U = d\phi/dr$ abhängt, ist ϕ lediglich bis auf eine additive Konstante bestimmt. Die Transformation $\phi \mapsto \phi - C/k^2$ lässt U und damit auch u unverändert. Sofern $k \neq 0$ ist, können wir daher ohne Einschränkung $C = 0$ wählen. Umformen von Gleichung 30 ergibt die Behauptung.

- (d) Wir zeigen, dass die endliche Lösung von Gleichung 29 gegeben ist durch

$$\phi = \frac{A \sin kr}{r}. \quad (31)$$

Wenden wir auf Gleichung 30 (mit $C = 0$) die Produktregel an, so erhalten wir

$$\frac{1}{r^2} \left(2r \underbrace{\frac{d\phi}{dr}}_{=\phi'} + r^2 \underbrace{\frac{d^2\phi}{dr^2}}_{=\phi''} \right) + k^2 \phi = 0 \iff \phi'' + \frac{2}{r} \phi' + k^2 \phi = 0. \quad (32)$$

Setzen wir $\psi(r) := r\phi(r)$, so gelten

$$\phi = \frac{\psi}{r}, \quad \phi' = \frac{\psi'}{r} - \frac{\psi}{r^2} \quad \text{und} \quad \phi'' = \frac{\psi''}{r} - 2\frac{\psi'}{r^2} + 2\frac{\psi}{r^3}.$$

Einsetzen in Gleichung 32 ergibt

$$\left(\frac{\psi''}{r} - 2\frac{\psi'}{r^2} + 2\frac{\psi}{r^3} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\psi'}{r} - \frac{\psi}{r^2} \right) + k^2 \frac{\psi}{r} = 0 \iff \frac{\psi''}{r} + k^2 \frac{\psi}{r} = 0 \iff \psi'' + k^2 \psi = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$\psi = A \sin kr + B \cos kr.$$

Damit ist

$$\phi = \frac{A \sin kr + B \cos kr}{r}.$$

Für $r \rightarrow 0$ gilt aufgrund der Taylorentwicklung, dass $\sin(kr) \sim kr$ und $\cos(kr) \sim 1$. Daher ist $\sin(kr)/r \sim k$ beschränkt, während $\cos(kr)/r \sim 1/r$ divergiert. Da die Lösung bei $r = 0$ beschränkt bleiben muss, folgt $B = 0$. Dies zeigt die Behauptung.

(e) Wir zeigen, dass wenn der symmetrische Spannungstensor

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\lambda U}{r} \quad (33)$$

auf $r = a$ verschwindet, dass dann

$$\frac{\tan ka}{ka} = \frac{4c_2^2}{4c_2^2 - k^2 a^2 c_1^2}$$

gilt. Aus Gleichung 31 folgt, dass

$$U = \frac{d\phi}{dr} = A \left(\frac{k \cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{r^2} \right).$$

Leiten wir dies partiell nach r ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial U}{\partial r} = A \left(-\frac{k^2 \sin kr}{r} - 2\frac{k \cos kr}{r^2} + 2\frac{\sin kr}{r^3} \right).$$

Einsetzen in Gleichung 33 ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)A \left(-\frac{k^2 \sin kr}{r} - 2\frac{k \cos kr}{r^2} + 2\frac{\sin kr}{r^3} \right) + \frac{2\lambda}{r}A \left(\frac{k \cos kr}{r} - \frac{\sin kr}{r^2} \right) \\ &= A \left(-(\lambda + 2\mu)\frac{k^2 \sin kr}{r} - 4\mu\frac{k \cos kr}{r^2} + 4\mu\frac{\sin kr}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $r = a$ und fordern $\sigma_{rr}(a) = 0$, so folgt

$$-(\lambda + 2\mu)\frac{k^2 \sin ka}{a} - 4\mu\frac{k \cos ka}{a^2} + 4\mu\frac{\sin ka}{a^3} = 0.$$

Multiplikation mit $a^3 \neq 0$ ergibt

$$-(\lambda + 2\mu)k^2 a^2 \sin ka - 4\mu ka \cos ka + 4\mu \sin ka = 0.$$

Für $\cos ka \neq 0$ erhalten wir durch Division

$$4\mu ka = \underbrace{(4\mu - (\lambda + 2\mu)k^2 a^2)}_{=\tan ka} \frac{\sin ka}{\cos ka} \iff \frac{\tan ka}{ka} = \frac{4\mu}{4\mu - (\lambda + 2\mu)k^2 a^2}.$$

Mit $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ und $c_2^2 = \mu/\rho$ folgt schließlich

$$\frac{\tan ka}{ka} = \frac{4c_2^2 \rho}{4c_2^2 \rho - c_1^2 \rho k^2 a^2} \iff \frac{\tan ka}{ka} = \frac{4c_2^2}{4c_2^2 - c_1^2 k^2 a^2}.$$

Aufgabe 5.2

Wir betrachten eine zweidimensionale ebene rotationale Welle mit Amplitude I, die im Einfallswinkel θ_I auf einen halbbunendlichen elastischen Körper trifft. Der reflektierte rotationale Anteil habe die Amplitude R und den Reflexionswinkel θ_R , und der reflektierte dilatationale Anteil habe die Amplitude D und den Reflexionswinkel θ_D . Wir zeigen, dass dann

$$\frac{\sin \theta_I}{c_2} = \frac{\sin \theta_R}{c_2} = \frac{\sin \theta_D}{c_1}. \quad (34)$$

Analog zu Unterunterabschnitt 3.2.2 haben wir für die einfallende rotationale Welle den Wellenvektor

$$\mathbf{k}_I = k_2(\sin \theta_I, \cos \theta_I),$$

wobei $k_2 = \omega/c_2$. Für die reflektierten Wellen haben wir die Wellenvektoren

$$\mathbf{k}_R = k_2(\sin \theta_R, -\cos \theta_R) \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_D = k_1(\sin \theta_D, -\cos \theta_D),$$

wobei $k_1 = \omega/c_1$. Analog zu Unterunterabschnitt 3.2.2 erhält man aus der Forderung, dass die Phasen aller Wellen auf der Grenzfläche $x_2 = 0$ für alle x_1 und alle Zeiten t übereinstimmen

$$k_2 \sin \theta_I = k_2 \sin \theta_R = k_1 \sin \theta_D$$

und damit

$$\frac{\sin \theta_I}{c_2} = \frac{\sin \theta_R}{c_2} = \frac{\sin \theta_D}{c_1}.$$

Nun zeigen wir, dass die reflektierte dilatationale Welle verschwindet, wenn $\theta_I \in \{0, \pi/4\}$. Aus Gleichung 34 folgt direkt, dass der Einfallswinkel θ_I und der Reflexionswinkel der Rotationswelle θ_R gleich sind. Für den Reflexionswinkel der Dilatationswelle folgt

$$\sin \theta_D = \frac{c_1}{c_2} \sin \theta_I.$$

Wir wählen die Darstellung analog zum Fall der einfallenden Dilatationswelle aus Unterunterabschnitt 3.2.2. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & I(\cos \theta_I, -\sin \theta_I) \exp\left(i\omega\left(\frac{x_1 \sin \theta_I + x_2 \cos \theta_I}{c_2} - t\right)\right) \\ & + R(\cos \theta_I, \sin \theta_I) \exp\left(i\omega\left(\frac{x_1 \sin \theta_I - x_2 \cos \theta_I}{c_2} - t\right)\right) \\ & + D(\sin \theta_D, -\cos \theta_D) \exp\left(i\omega\left(\frac{x_1 \sin \theta_D - x_2 \cos \theta_D}{c_1} - t\right)\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Die Komponenten σ_{12} und σ_{22} des symmetrischen Spannungstensors auf der Oberfläche $x_2 = 0$ berechnen sich aus Gleichung 35 unter Verwendung der Identitäten

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \quad \text{und} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

zu

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & 2\mu e_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ = & \mu i\omega \left(\frac{I(\cos^2 \theta_I - \sin^2 \theta_I)}{c_2} - \frac{R(\cos^2 \theta_I - \sin^2 \theta_I)}{c_2} - \frac{D(2 \sin \theta_D \cos \theta_D)}{c_1} \right) \exp(\Omega_I) \\ = & \mu i\omega \left(\frac{I \cos 2\theta_I}{c_2} - \frac{R \cos 2\theta_I}{c_2} - \frac{D \sin 2\theta_D}{c_1} \right) \exp(\Omega_I) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \lambda e_{kk} \delta_{22} + 2\mu e_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \\ = & \lambda i\omega \left(\frac{D(\sin^2 \theta_D + \cos^2 \theta_D)}{c_1} \right) \exp(\Omega_I) \\ & + 2\mu i\omega \left(-\frac{I \sin \theta_I \cos \theta_I}{c_2} - \frac{R \sin \theta_I \cos \theta_I}{c_2} + \frac{D \cos^2 \theta_D}{c_1} \right) \exp(\Omega_I) \\ = & \lambda i\omega \frac{D}{c_1} \exp(\Omega_I) + 2\mu i\omega \left(-(I + R) \frac{\sin 2\theta_I}{2c_2} + D \frac{\cos^2 \theta_D}{c_1} \right) \exp(\Omega_I). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$\Omega_I = i\omega \left(\frac{x_1 \sin \theta_I}{c_2} - t \right)$$

geschrieben. Ist die Amplitude I der eintreffenden Welle bekannt, so können wir aus den obigen Gleichungen aufgrund der Spannungsfreiheit folgern, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{I} \right) \frac{\cos 2\theta_I}{c_2} + \left(\frac{D}{I} \right) \frac{\sin 2\theta_D}{c_1} &= \frac{\cos 2\theta_I}{c_2} \quad \text{und} \\ -\left(\frac{R}{I} \right) \frac{\mu \sin 2\theta_I}{c_2} + \left(\frac{D}{I} \right) \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_D}{c_1} &= \frac{\mu \sin 2\theta_I}{c_2}. \end{aligned}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_I \left(\frac{R}{I} - 1 \right) + \frac{c_2}{c_1} \sin 2\theta_D \left(\frac{D}{I} \right) &= 0 \quad \text{und} \\ \mu \sin 2\theta_I \left(\frac{R}{I} + 1 \right) - \frac{c_2}{c_1} (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_D) \left(\frac{D}{I} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Ist $\theta_I = 0$, so gilt $\sin 2\theta_I = 0$ und $\cos 2\theta_I = 1$. Wegen $c_2/c_1 \neq 0$ und $\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_D > 0$ folgt in diesem Fall aus der zweiten Gleichung von den Gleichungen aus 36 sofort, dass $D = 0$.

Ist $\theta_I = \pi/4$, so gilt $\cos 2\theta_I = 0$ und $\sin 2\theta_I = 1$. Wegen $c_2/c_1 \neq 0$ und $\sin 2\theta_D \neq 0$ folgt in diesem Fall aus der ersten Gleichung von den Gleichungen aus 36 sofort, dass $D = 0$.

Zuletzt untersuchen wir, was passiert, wenn im Bereich $x_2 \geq 0$ ein weiteres elastisches Material angebracht wird. Anstelle einer freien Oberfläche haben wir dann für $x_2 \leq 0$ das erste Medium mit $(\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$ und den Geschwindigkeiten

$$c_1^{(1)} \quad \text{und} \quad c_2^{(1)}$$

sowie für $x_2 \geq 0$ das zweite Medium mit $(\lambda_2, \mu_2, \rho_2)$ und den Geschwindigkeiten

$$c_1^{(2)} \quad \text{und} \quad c_2^{(2)}.$$

Die Grenzfläche bei $x_2 = 0$ bleibt erhalten. Die Phasenstetigkeit entlang der Grenzfläche erzwingt die Gleichheit der tangentialen Komponente des Wellenvektors. Für Primärwellen P im Medium $j \in \{1, 2\}$ gilt

$$\frac{\sin \theta_P^{(1)}}{c_1^{(1)}} = \frac{\sin \theta_P^{(2)}}{c_1^{(2)}}.$$

Für Sekundärwellen S im Medium $j \in \{1, 2\}$ gilt ebenso

$$\frac{\sin \theta_S^{(1)}}{c_2^{(1)}} = \frac{\sin \theta_S^{(2)}}{c_2^{(2)}}.$$

Eine einfallende Welle erzeugt nun sowohl reflektierte als auch transmittierte Primär- und Sekundärwellen. Damit treten insgesamt vier unbekannte Amplituden auf. An der Grenzfläche $x_2 = 0$ gelten die Stetigkeitsbedingungen der Verschiebung $\mathbf{u}$ sowie der Komponenten σ_{12} und σ_{22} des symmetrischen Spannungstensors:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{u}^{(2)}, \\ \sigma_{12}^{(1)} &= \sigma_{12}^{(2)} \quad \text{und} \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} \quad \text{auf } x_2 = 0. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist $D \neq 0$, auch für $\theta_I \in \{0, \pi/4\}$, da die zusätzliche Grenzfläche eine Kopplung zwischen Dilatations- und Rotationswellen bewirkt.