

Verkehrswellen

von

Thomas Anton Kissel

Ausarbeitung zum Seminar Wellenphänomene

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Mainz, den 01.07.2026

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Herleitung der bestimmenden Gleichung	3
3. Störungen mit kleiner Amplitude eines gleichförmigen Zustands	6
4. Das nichtlineare Anfangswertproblem	9
5. Die Schockgeschwindigkeit	23
A. Literaturverzeichnis	26
B. Eigenständigkeitserklärung	27

1. Einleitung

Das Modellieren von Autoverkehrsflüssen habe sich, in den letzten 40 Jahren, schnell entwickelt. Zu den Autoverkehrsflüssen wird sich ein einfacheres Modell angeschaut, welches, trotz der Einfachheit, qualitative und quantitative Eigenschaften von realen Verkehrsflüssen erfasst

2. Herleitung der bestimmenden Gleichung

Zu Beginn werden folgende Annahmen gemacht:

- Es gibt genau eine Autofahrbahn, wobei die Autos sich nicht überholen dürfen.
- Es wird lokal die Autodichte ρ als Anzahl der Autos pro Längeneinheit der Straße definiert. Die Dichte wird festgelegt, indem man bei einem Punkt auf der Straße eine kleine aber endliche Länge der Straße nimmt, worin der Punkt enthalten ist, und definiert die Autodichte als proportional zu der Anzahl der Autos in diesem Bereich. Dabei ist ρ als Funktion $\rho(x, t)$ für einen Ort x und eine Zeit t definiert.
- Es wird die Autogeschwindigkeit als Funktion $v(x, t)$ definiert, wobei die Autogeschwindigkeit nur von ρ abhängt, also $v \equiv v(\rho)$ ist. Dabei ist die Idee, dass die Geschwindigkeit eines Autos nur von der Distanz zum vorderen Auto abhängt. Daraus folgt, dass die Autogeschwindigkeit nur von der lokalen Autodichte abhängt.

Nun betrachte eine endlich lange Straße mit $x_1 \leq x \leq x_2$. Die Wechselrate der Anzahl von Autos in dem Bereich ist gleich zum Durchfluss der Autos bei x_1 minus dem Durchfluss der Autos bei x_2 . Dies ist der Fall, da keine Autos in dem Bereich auftauchen oder verschwinden können, ohne bei x_1 oder x_2 vorbeizufahren.

Als Gleichung formuliert:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx}_{\substack{\text{zeitliche \u00c4nderung der Anzahl} \\ \text{von Autos in dem Bereich} \\ x_1 \leq x \leq x_2}} = \underbrace{q(x_1, t)}_{\text{Durchflussrate bei } x_1} - \underbrace{q(x_2, t)}_{\text{Durchflussrate bei } x_2} \quad (2.1)$$

$q(x, t)$ beschreibt die Durchflussrate der Autos als Funktion, wobei $q(x, t) = \rho(x, t) \cdot v(\rho)$ ist. Die Gleichung (2.1) beschreibt hierbei die Erhaltung von Autos und muss zugleich f\u00fcr jedes x_1 und x_2 erf\u00fcllt sein.

F\u00fcr glatte Dichten: Mit dem Limes $x_2 \rightarrow x_1$ angewendet, bekommt man die Differnetialform $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ f\u00fcr den Erhalt von Autos.

$$\implies \text{Z.Z. } \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} q(x_1, t) - q(x_2, t) \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Beweis.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \xrightarrow[\rho \text{ stetig und } \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ stetig}]{\text{Leibniz-Regel}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx$$

und

$$\begin{aligned} q(x_1, t) - q(x_2, t) &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \\ \implies \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx \\ \iff \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} dx &= 0 \\ \iff \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx}{x_2 - x_1} + \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx}{x_2 - x_1} &= 0 \\ \iff \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx}{x_2 - x_1} + \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx}{x_2 - x_1} &= 0 \\ \xleftrightarrow{\text{Grenzwert des Differenzenquotientens}} \frac{\partial \rho(x_1, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x_1, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

□

Die Leibniz-Regel lautet

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t) \cdot \frac{db(t)}{dt} - f(a(t), t) \cdot \frac{da(t)}{dt}$$

[2].

Die übergeordnete Erhaltungsgleichung lautet $\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot q = 0$, wobei a ein Vektor mit den Dichten der erhaltenen Mengen und q deren Durchflussraten ist.

$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0$ ist hierbei die kanonische Form für kinematische Wellen. Diese Wellen entstehen ausschließlich aufgrund des Bedarfs Masse zu erhalten, in diesem Fall, um Autos zu erhalten. Bei diesen Wellen finde kein Kräfteausgleich statt, welchen es bei dynamischen Wellen hingegen gäbe [1, S.223].

Nun machen wir Annahmen über $v(\rho)$, die $v(\rho)$ realitätsnäher machen sollen:

- Es gibt ein oberes Limit $\rho_{\max}$ für mögliche Dichten mit $v(\rho_{\max}) = 0$. Diese Dichte tritt auf, wenn es Stoßstangen an Stoßstangen Verkehr gibt.
- $v(\rho)$ fällt monoton für $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$. Dabei fließt der Verkehr in die positive x-Richtung, also $v(\rho) \geq 0$.

3. Störungen mit kleiner Amplitude eines gleichförmigen Zustands

Wir schauen uns den Fall des linearisierten Problems an, welcher die Ausbreitung kleiner Störungen auf einem gleichmäßigen Verkehrsfluss bestimmt. Dazu bestimmen wir die Ableitung von $q(\rho)$ nach x und schreiben die Gleichung $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0$ daraufhin um.

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(\rho)}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{Kettenregel}} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(\rho)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$\implies c(\rho) := \frac{dq(\rho)}{d\rho} = \frac{d(\rho \cdot v(\rho))}{d\rho} \xrightarrow{\text{Produktregel}} v(\rho) + \rho \cdot \frac{dv(\rho)}{d\rho}$$

$c(\rho)$ wird als kinematische Wellengeschwindigkeit bezeichnet.

Nun suchen wir nach Lösungen, welche Störungen mit kleiner Amplitude von einem gleichförmigen Zustand $\rho = \rho_0$ darstellen. Hierbei bedeutet gleichförmig, dass jenes ρ_0 konstant ist. Wegen dieser Art von Lösung, schreiben wir ρ als $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t)$ mit $\tilde{\rho}(x, t) \ll 1$.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{Einsetzen von } \rho_0 + \tilde{\rho} \text{ für } \rho} \frac{\partial(\rho_0 + \tilde{\rho})}{\partial t} + c(\rho_0 + \tilde{\rho}) \cdot \frac{\partial(\rho_0 + \tilde{\rho})}{\partial x} = 0 \\ & \iff \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c(\rho_0 + \tilde{\rho}) \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \\ & \xrightarrow{\text{Taylor-Entwicklung ersten Grades von } c(\rho_0 + \tilde{\rho})} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (c(\rho_0) + \tilde{\rho} \cdot \frac{dc(\rho_0)}{d\rho}) \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \\ & \xrightarrow{\text{ignorieren des nicht linearen Termes}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c(\rho_0) \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Sei $\eta := x - c(\rho_0) \cdot t$. Nun möchten wir Lösungen für $\tilde{\rho}(\eta, t)$ finden.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial x} \xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{mehrdimensionale}} \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} \\
&\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} \xrightarrow[\text{Kettenregel}]{\text{mehrdimensionale}} \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=-c(\rho_0)} + \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} \cdot -c(\rho_0) + \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} \\
&\xrightarrow{\text{einsetzen der Ableitungen}} \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} \cdot -c(\rho_0) + \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} + c(\rho_0) \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial \eta} = 0 \\
&\iff \frac{\partial \tilde{\rho}(\eta, t)}{\partial t} = 0 \\
&\xrightarrow{\tilde{\rho} \text{ hängt nur von } \eta \text{ ab}} \tilde{\rho}(\eta, t) = f(\eta) = f(x - c(\rho_0) \cdot t)
\end{aligned}$$

ist die allgemeine Lösung für eine beliebige Funktion f . Dies ist eine kinematische Welle, welche sich ausbreitet ohne ihre Form entlang des Weges mit der kinematischen Wellengeschwindigkeit $c(\rho_0)$ zu ändern. In dem Sinne, wenn $x = x_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist und sich die Zeit um 2 Einheiten verändert, ändert sich der Ort x_0 um $2 \cdot c(\rho_0)$ zu x_2 , wo $\tilde{\rho} = f(x_0)$, damit $x_0 = x_2 - 2c(\rho_0)$ bleibt. Daraus folgt, dass $f(x_0) = f(x_2 - 2c(\rho_0))$ und $x_0 + 2c(\rho_0) = x_2$. Also bleibt $\tilde{\rho}$ konstant entlang diesem Weg, welcher sich durch $c(\rho_0) \cdot t$ ändert.

Wenn $q(\rho)$ bei $\rho = \rho^*$ maximal ist, dann folgt, dass $c > 0$ für $\rho < \rho^*$ und $c < 0$ für $\rho > \rho^*$ für ein Modell, welches wir später betrachten werden. Abbildung 1 verdeutlicht dies. Dies zeigt uns, dass sich nicht die Autos ausbreiten, sondern Störungen in dem Medium, welches durch Autos erzeugt wird. In dem Sinne fahren auch die Autos nicht rückwärts, wenn $c < 0$ ist. Nun betrachte die Kurve $x = X(t)$, bei welcher die Dichte ρ konstant ist. Wir hatten herausgefunden, dass $f(x - c(\rho_0) \cdot t)$ eine kinematische Welle ist, welche ihre Form entlang des Weges mit der kinematischen Wellengeschwindigkeit $c(\rho_0)$ nicht ändert. Aus unseren Rechnungen dazu sieht man, dass ρ auf dem Weg $x = X(t) = x_0 + c(\rho_0)t$ konstant ist. x_0 ist dabei der Startpunkt des Weges

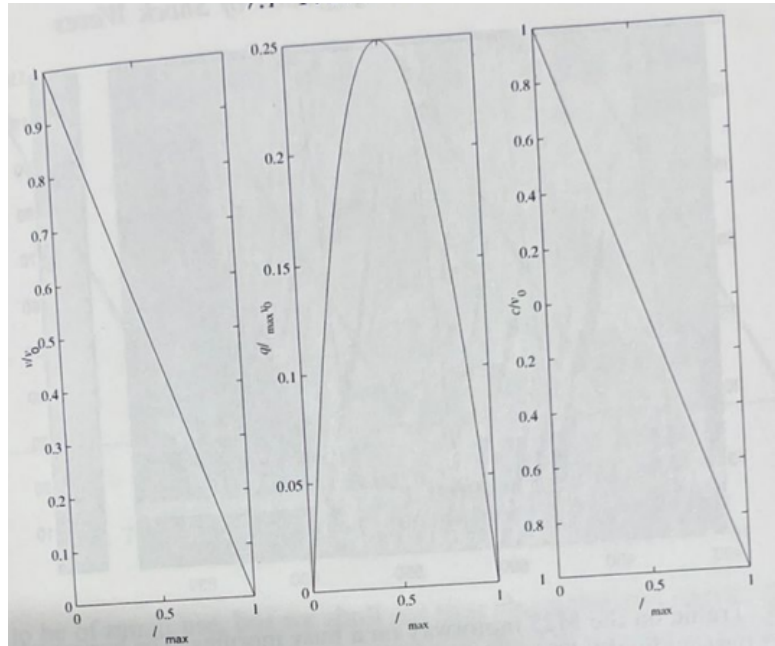


Abbildung 1.: Die Autogeswindigkeit, die Durchflussrate und die kinematische Wellengeschwindigkeit.

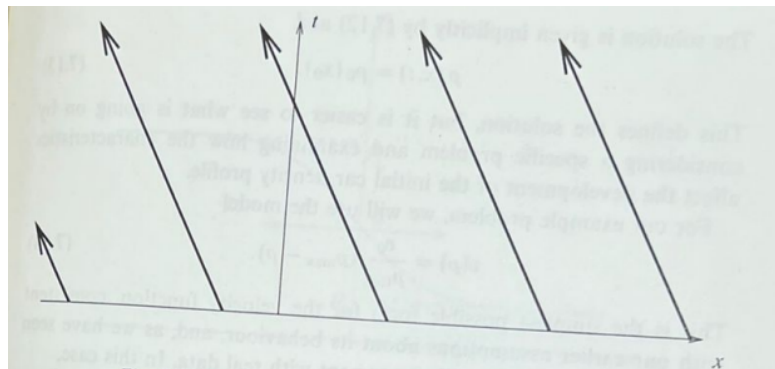


Abbildung 2.: Die Charakteristika des linearisierten Problems.

bei $t = 0$. $X(t)$ nennt man charakteristische Kurve oder auch Charakteristik. Abbildung 2 stellt die Charakteristika für ein $c(\rho_0) < 0$ beispielhaft dar.

4. Das nichtlineare Anfangswertproblem

Wir möchten $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c(\rho(x,t)) \cdot \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$ mit $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ als Anfangsbedingung lösen. Dazu versuchen wir zuerst eine Menge von Charakteristika $X(t)$ zu konstruieren.

$$\rho(X(t), t) \stackrel[\text{Charakteristik}]{\rho \text{ konstant entlang}} \rho(X(0), 0) = \rho_0(X(0))$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(X(t), t) &\stackrel[\text{Kettenregel}]{\text{mehrdimensionale}} \frac{\partial \rho(X(t), t)}{\partial t} + \frac{dX(t)}{dt} \cdot \frac{\partial \rho(X(t), t)}{\partial x} \\ &\stackrel[\text{Charakteristik}]{\text{konstant entlang}} 0 \\ \text{Vergleich mit } \frac{\partial \rho(X(t), t)}{\partial t} + c(\rho(X(t), t)) \cdot \frac{\partial \rho(X(t), t)}{\partial x} &= 0 \implies \frac{dX(t)}{dt} = c(\rho(X(t), t)) \end{aligned}$$

Da ρ per Definition konstant entlang einer Charakteristik ist, folgt:

$$c(\rho(X(t), t)) \text{ ist konstant} \implies \frac{dX(t)}{dt} \text{ ist konstant}$$

$$\implies x = X(t) = x_0 + c(\rho(X(t), t)) \cdot t = x_0 + c(\rho(X(0), 0)) \cdot t = x_0 + c(\rho_0(x_0)) \cdot t$$

für $-\infty < x_0 < \infty$.

$$\implies \rho(x, t) = \rho_0(x_0) \text{ ist die allgemeine Lösung.}$$

Anhand des folgenden Beispiels lässt sich verdeutlichen, wie die Charakteristika die Entwicklung des anfänglichen Autodichte-Profiles beeinflussen. Dazu

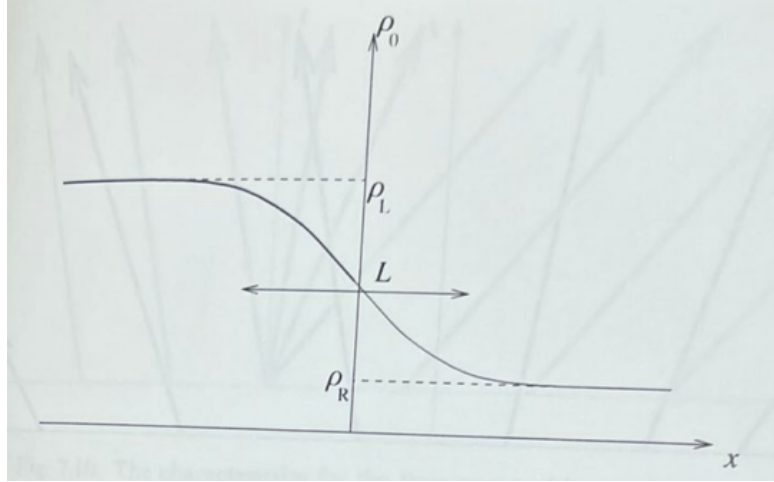


Abbildung 3.: Die Anfangswerte für das Anfangswertproblem mit $\rho_L > \rho_R$.

betrachten wir das Beispiel Problem $v(\rho) = \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot (\rho_{\max} - \rho)$ mit $v_0 := v(0)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow c(\rho) &= \frac{d(v(\rho) \cdot \rho)}{d\rho} = v(\rho) + \frac{dv(\rho)}{d\rho} \cdot \rho = \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot (\rho_{\max} - \rho) + \rho \cdot -\frac{v_0}{\rho_{\max}} \\ &= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot (\rho_{\max} - 2\rho) \end{aligned}$$

Welche Hochpunkte besitzt die Durchflussrate?

$$0 = \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot (\rho_{\max} - 2\rho) \iff \rho_{\max} = 2\rho \iff \frac{1}{2} \cdot \rho_{\max} = \rho$$

$$\frac{d^2 q(\rho)}{d\rho^2} = -2 \cdot \frac{v_0}{\rho_{\max}} < 0 \implies \rho^* = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\max}$$

Die Anfangsbedingung lautet $\rho_0(x) := \rho(x, 0) = \frac{\rho_L + \rho_R \cdot \exp(\frac{x}{L})}{1 + \exp(\frac{x}{L})}$ mit $\rho_L, \rho_R, L > 0$. Dabei geht $\rho \rightarrow \rho_L$ mit $x \rightarrow -\infty$ und $\rho \rightarrow \rho_R$ mit $x \rightarrow \infty$, wobei sich der Wandel zwischen ρ_L und ρ_R über eine Distanz von $\mathcal{O}(L)$ vollzieht. Abbildung 3 zeigt bildlich die Anfangsbedingung und die Verbildlichung von L . Abbildung 4 zeigt die kinematische Wellengeschwindigkeit.

Nun ist $\rho_L > \rho_R$. Wir wollen hiermit betrachten, welche größeren Unterschiede auftreten, wenn die Dichte mit dem Weg steigt und wenn die Dichte

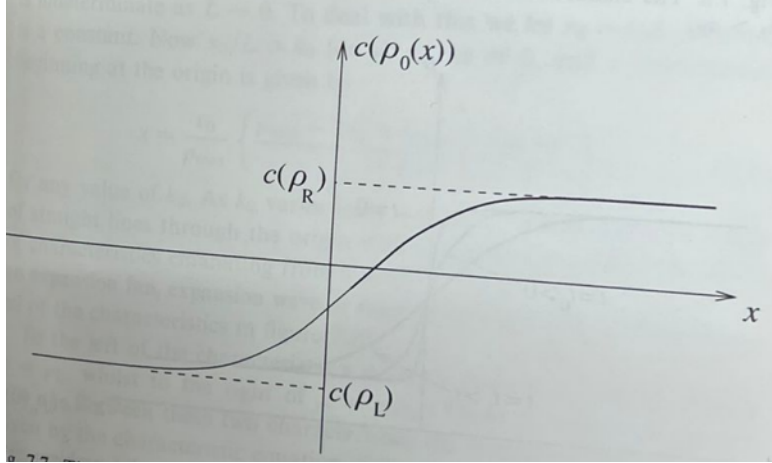


Abbildung 4.: Die anfängliche kinematische Wellengeschwindigkeit für das Anfangswertproblem mit $\rho_L > \rho_R$.

mit dem Weg sinkt.

$$\begin{aligned}
 \frac{dc(\rho)}{d\rho} &= -2 \cdot \frac{v_0}{\rho_{\max}} < 0 \implies c(\rho) \text{ ist streng monoton fallend in } \rho \\
 \frac{d\rho_0(x)}{dx} &= \frac{\rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))} + (\rho_L + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)) \cdot -\frac{\exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \\
 &= \frac{\rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))} - \frac{\rho_L \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right) + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{2x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \\
 &= \frac{\rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right) + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{2x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} - \frac{\rho_L \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right) + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{2x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \\
 &= \frac{(\rho_R - \rho_L) \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \xrightarrow{(\rho_R - \rho_L) < 0} \rho_0(x) \text{ ist streng monoton fallend in } x \\
 \implies \frac{dc(\rho_0(x))}{dx} &= \underbrace{\frac{d\rho_0(x)}{dx}}_{\text{negativ}} \cdot \underbrace{\frac{dc(\rho_0(x))}{d\rho_0(x)}}_{\text{negativ}} = \text{etwas positives} \\
 \implies c(\rho_0(x)) &\text{ ist streng monoton steigend in } x
 \end{aligned}$$

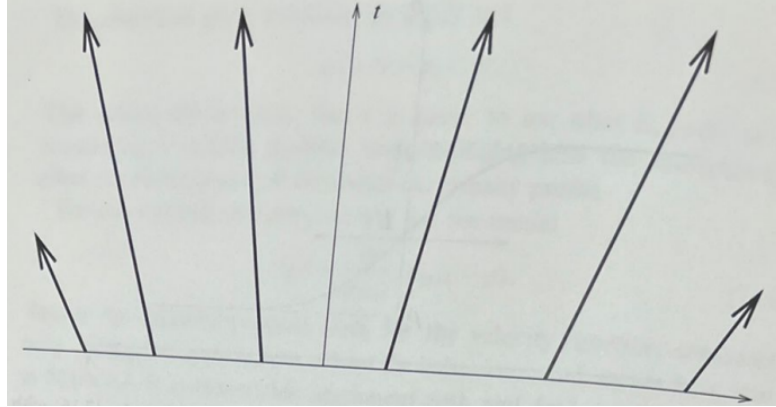


Abbildung 5.: Die Charakteristika für das Anfangswertproblem mit $\rho_L > \rho_R$ und horizontaler Achse x .

$$\begin{aligned}
 c(\rho_0(x)) &= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot \left(\rho_{\max} - 2 \left(\frac{\rho_L + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right)} \right) \right) \\
 &= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot \left(\frac{\rho_{\max} + \rho_{\max} \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right) - 2\rho_L - 2\rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right)} \right) \\
 &= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot \left(\frac{\rho_{\max} - 2\rho_L + (\rho_{\max} - 2\rho_R) \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right)} \right) \\
 \underline{\underline{X(t) = x_0 + c(\rho_0(x_0)) \cdot t}} &\xrightarrow{\quad} \frac{dX(t)}{dt} \text{ steigt mit steigendem } x_0
 \end{aligned}$$

Die Charakteristika sehen aus wie in Abbildung 5 zu sehen ist. Jede Charakteristik hat hier eine einzigartige Steigung bzw. Geschwindigkeit und qualitativ führt das Verbreiten der Charakteristika zu einer Verbreitung des anfänglichen Dichte Profils, wie in Abbildung 6 zu sehen ist. Bildlich gesprochen fahren Autos aus dem höheren Dichte Bereich in den niedrigeren Dichte Bereich, wobei sowohl ein Defizit der Autos als auch ein Überschuss an Autos über die Straße wandert. In dem Sinne merkt man wieder, dass die Autos das Medium erschaffen, von welchem wir die Eigenschaften, wie z.B. die Dichte, untersuchen.

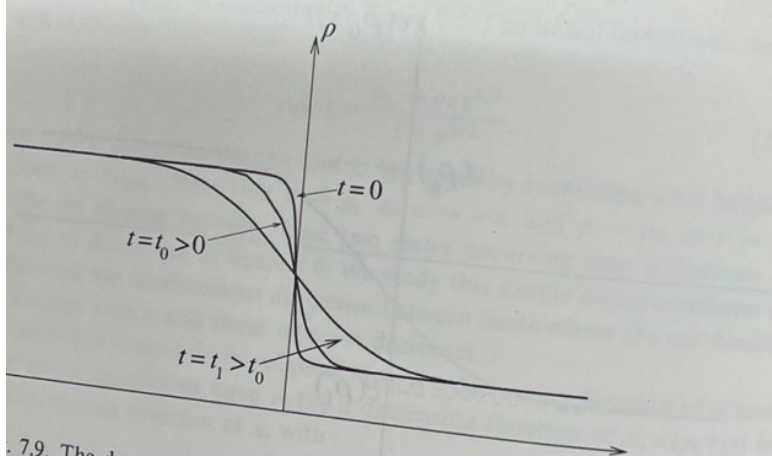


Abbildung 6.: Die Entwicklung des Dichte Profil für das Anfangswertproblem mit $\rho_L > \rho_R$ und horizontaler Achse $x - c(\rho_0(0))t$.

Nun ist zusätzlich $L \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow \rho_0(x) = \frac{\rho_L + \rho_R \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right)} \xrightarrow{L \rightarrow 0} \begin{cases} \rho_L & \text{für } x < 0 \\ \rho_R & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Das Anfangswertproblem $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + c(\rho(x,t)) \cdot \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$ mit $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ und obigem $\rho_0(x)$ nennt man Riemann Problem und besitzt große Wichtigkeit, um diesen Problem-Typ zu verstehen und um numerische Lösungsschemata zu konstruieren.

$$X(t) = x_0 + c(\rho_0(x_0))t \Rightarrow X(t) = x_0 + c(\rho_L)t \text{ für } x_0 < 0$$

$$\text{und } X(t) = x_0 + c(\rho_R)t \text{ für } x_0 > 0$$

Für $x_0 = 0$: $\frac{x_0}{L}$ ist für $L \rightarrow 0$ unbestimmt. Um festlegen zu können, in welchem Verhältnis x_0 gegen 0 geht, setzen wir $x_0 = k_0 L$ mit $k_0 \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $\frac{x_0}{L} = k_0$.

$$\Rightarrow x = X(t) = \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot \left(\frac{\rho_{\max} - 2\rho_L + (\rho_{\max} - 2\rho_R) \cdot \exp(k_0)}{1 + \exp(k_0)} \right) \cdot t$$

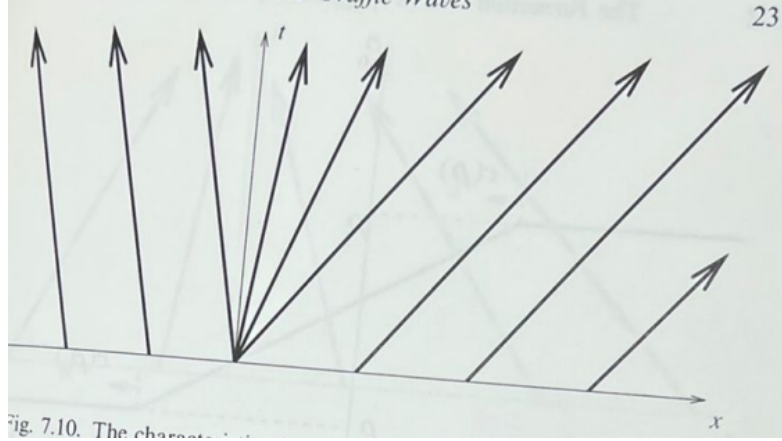


Abbildung 7.: Die Charakteristika für das Riemann-Problem mit $\rho_L > \rho_R$.

für $k_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$. Diese Funktion beschreibt eine Menge von Charakteristika, welche alle durch den Ursprung gehen mit $c(\rho_L) < \frac{x}{t} < c(\rho_R)$, da $c(\rho)$ streng monoton fallend ist und $\rho_R < \frac{\rho_L + \rho_R \cdot \exp(k_0)}{1 + \exp(k_0)} < \rho_L$. Eine Charakteristika-Familie, welche in dieser Art aus einem Punkt entspringen, nennt man Expansionsfächer, Expansionswelle oder Verdünnungswelle. Die Charakteristika dazu sind in Abbildung 7 gezeichnet. Links von $c(\rho_L)t$ ist eine gleichmäßige Dichte $\rho = \rho_L$ und rechts von $c(\rho_R)t$ ist eine gleichmäßige Dichte $\rho = \rho_R$. Zwischen diesen zwei Charakteristika berechnet man ρ aus $c(\rho) = \frac{x}{t}$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{v_0}{\rho_{\max}}(\rho_{\max} - 2\rho) &= \frac{x}{t} \Leftrightarrow \rho_{\max} - 2\rho = \frac{x\rho_{\max}}{tv_0} \\ \Leftrightarrow \rho &= -\frac{x\rho_{\max}}{2tv_0} + \frac{1}{2}\rho_{\max} \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2}\rho_{\max} \left(1 - \frac{x}{tv_0}\right) \end{aligned}$$

Das Riemann Problem mit $\rho_L > \rho_R$ hat also folgende Lösung:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L & \text{für } x \leq c(\rho_L)t \\ \frac{1}{2} \cdot \rho_{\max} \cdot \left(1 - \frac{x}{t \cdot v_0}\right) & \text{für } c(\rho_L)t \leq x \leq c(\rho_R)t \\ \rho_R & \text{für } x \geq c(\rho_R)t \end{cases}$$

Abbildung 8 stellt die Lösung dar. Durch genaues betrachten der Lösung ist

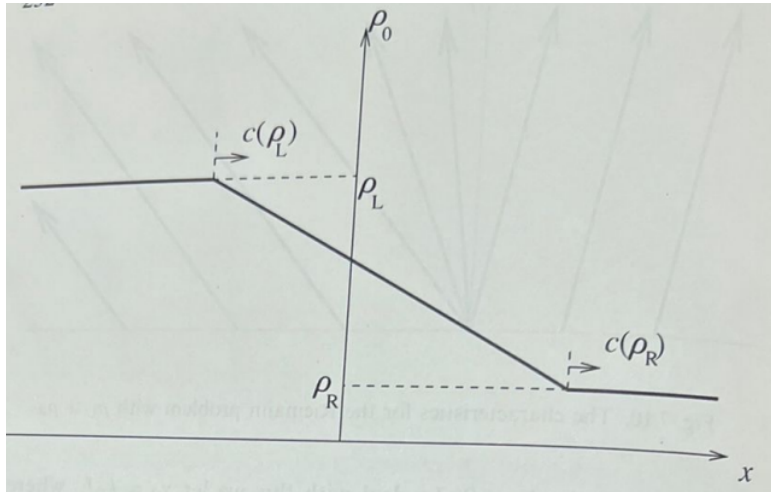


Abbildung 8.: Die Lösung für das Riemann-Problem mit $\rho_L > \rho_R$.

zu erkennen, dass die Lösung als $\rho = \rho_1 f(\frac{x}{v_0 t})$ für irgendein f und irgendein ρ_1 dargestellt werden kann.

$$\xrightarrow{\text{einsetzen in } \frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0} \left(\frac{x}{t} - c(\rho) \right) f' \left(\frac{x}{v_0 t} \right)$$

$\Rightarrow$ Die Lösung hat Expansionsfächer und gleichmäßige Bereiche

Nun ist $\rho_R > \rho_L$.

$$\frac{d\rho_0(x)}{dx} = \frac{(\rho_R - \rho_L) \cdot \exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L \cdot (1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2}$$

$$\xrightarrow{(\rho_R - \rho_L) > 0} \rho_0(x) \text{ ist streng monoton steigend in } x$$

Da $c(\rho)$ weiterhin streng monoton fallend in ρ ist, folgt:

$$\frac{dc(\rho_0(x))}{dx} = \underbrace{\frac{d\rho_0(x)}{dx}}_{\text{positiv}} \cdot \underbrace{\frac{dc(\rho_0(x))}{d\rho_0(x)}}_{\text{negativ}} = \text{etwas negatives}$$

$$\Rightarrow c(\rho_0(x)) \text{ ist streng monoton fallend in } x$$

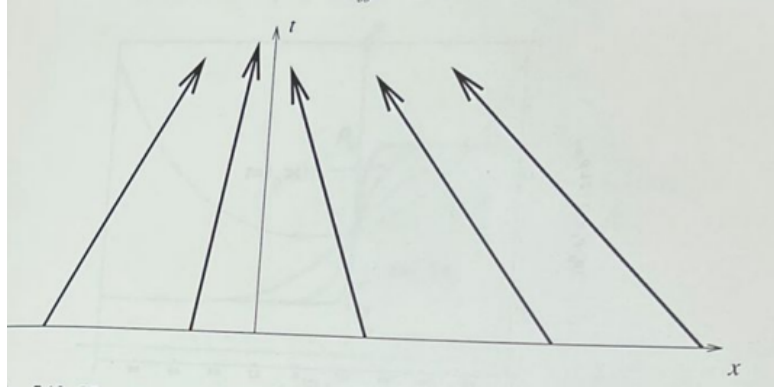


Abbildung 9.: Die Charakteristika für das Anfangswertproblem mit $\rho_L < \rho_R$.

Abbildung 9 zeigt die Charakteristika. Charakteristika müssen sich schneiden, da $c(\rho_0(x_0))$ streng monoton fallend in x_0 ist. Es stellt sich dabei die Frage, welchen Wert von ρ der Charakteristika beim Schnittpunkt als Lösung angenommen werden soll, da sonst ρ mehrdeutig an diesen Schnittpunkten ist. Aktuell wird das Anfangswertproblem schlecht gestellt, sobald sich bestimmte Charakteristika treffen, da Mehrdeutigkeiten auftreten.

Bevor wir uns anschauen, was wir gegen die Mehrdeutigkeit tun können, betrachten wir die Fragen, unter welchen Umständen, wo und wann schneiden sich die Charakteristika? Dazu betrachten wir zwei Charakteristika, die sich zur Zeit t_{12} schneiden.

$$\implies X_1(t) := x_1 + c(\rho_0(x_1))t_{12} = x_2 + c(\rho_0(x_2))t_{12} =: X_2(t)$$

Sei $X_3(t) := x_3 + c(\rho_0(x_3))t$ mit $x_1 < x_3 < x_2$.

Z.Z. $X_3(t)$ schneidet $X_1(t)$ oder $X_2(t)$ zeitlich bevor oder wenn sich $X_1(t)$ und $X_2(t)$ schneiden.

Beweis. Man nehme an, dass sich $X_1(t)$ und $X_2(t)$ zeitlich früher schneiden, als sich $X_3(t)$ mit $X_1(t)$ oder mit $X_2(t)$ schneidet.

$$\implies t_{13} > t_{12} \text{ und } t_{32} > t_{12} \text{ mit Schnittzeiten } t_{13} \text{ für } X_1(t) \text{ und } X_3(t)$$

$$\begin{aligned}
& \text{bzw. } t_{32} \text{ für } X_3(t) \text{ und } X_2(t) \\
& t_{12} \xrightarrow[\text{Schnittgleichung}]{\text{umstellen der}} \frac{x_2 - x_1}{c(\rho_0(x_1)) - c(\rho_0(x_2))} \\
& = \frac{(x_3 - x_1) + (x_2 - x_3)}{c(\rho_0(x_1)) - c(\rho_0(x_3)) + c(\rho_0(x_3)) - c(\rho_0(x_2))} \\
& = \frac{(c(\rho_0(x_1)) - c(\rho_0(x_3))) \cdot t_{13} + (c(\rho_0(x_3)) - c(\rho_0(x_2))) \cdot t_{32}}{c(\rho_0(x_1)) - c(\rho_0(x_3)) + c(\rho_0(x_3)) - c(\rho_0(x_2))} \\
& \implies t_{12} \text{ ist der gewichtete Mittelwert aus } t_{13} \text{ und } t_{32} \\
& \xrightarrow[\text{Def gewichteter Mittelwert}]{\text{Def gewichteter Mittelwert}} t_{12} = t_{13} = t_{32} \text{ oder } t_{13} < t_{12} < t_{32} \\
& \text{oder } t_{32} < t_{12} < t_{13} \\
& \implies \text{Widerspruch}
\end{aligned}$$

□

$\implies$ Die früheste Berührung bzw. Schnitt unter allen Charakteristika

muss zwischen benachbarten Charakteristika stattfinden.

Nun definiere $X_1(t) = x_0 + c(\rho_0(x_0))t$ und $X_2(t) = x_0 + \delta x + c(\rho_0(x_0 + \delta x))t$.

$$\xrightarrow{\delta x \rightarrow 0} X_2(t) \approx x_0 + \delta x + c(\rho_0(x_0))t + \delta x \cdot \frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}t$$

Sei $t = T$, wenn sich $X_1(t)$ und $X_2(t)$ schneiden.

$$\implies X_1(T) = X_2(T) \iff c(\rho_0(x_0))T = \delta x + c(\rho_0(x_0))T + \delta x \cdot \frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}T$$

$$-\delta x = \delta x \cdot \frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}T \iff -\frac{1}{\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}} = T$$

Wenn $\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0} > 0$ folgt, dass $T < 0$. Somit ist die Lösung überall gültig, wie im Fall $\rho_L > \rho_R$. Wenn hingegen $\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0} < 0$ folgt, dass $T > 0$. Somit ist diese

Lösung unklar definiert ab $t \geq T$. Der erste Schnitt von Charakteristika tritt bei $T_{\min} = \min_{-\infty < x < \infty} \left\{ -\frac{1}{\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}} \right\}$ auf, da die früheste Berührung bzw. Schnitt unter allen Charakteristika zwischen benachbarten Charakteristika stattfinden muss. Für unseren Fall ist also die Lösung für $0 \leq t < T_{\min}$ valide. Um diesen ersten Schnitt genau berechnen zu können, machen wir die Überlegung, dass der erste Schnitt auftritt, wenn $\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}$ negativ und im Betrag am Größten ist. Für unser Beispiel Problem ist:

$$\begin{aligned}
\frac{dc(\rho_0(x))}{dx} &= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \\
&\cdot \left(\underbrace{\frac{\exp\left(\frac{x}{L}\right) (\rho_{\max} - 2\rho_L + (\rho_{\max} - 2\rho_R)\exp\left(\frac{x}{L}\right))}{-L(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2}}_{= A} + \frac{(\rho_{\max} - 2\rho_R)\exp\left(\frac{x}{L}\right)}{L(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))} \right) \\
&= \frac{v_0}{\rho_{\max}} \cdot \left(A + \frac{(\rho_{\max} - 2\rho_R)\exp\left(\frac{x}{L}\right) + (\rho_{\max} - 2\rho_R)\exp\left(\frac{2x}{L}\right)}{L(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \right) \\
&= \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{\exp\left(\frac{x}{L}\right)}{(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2} \\
&= \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{\exp\left(\frac{x}{L}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x}{L}\right)}{(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2 \cdot \exp\left(-\frac{x}{L}\right)} \\
&= \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{1}{(1 + \exp\left(\frac{x}{L}\right))^2 \cdot \exp\left(-\frac{x}{2L}\right)^2} \\
&= \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{1}{(\exp\left(-\frac{x}{2L}\right) + \exp\left(\frac{x}{2L}\right))^2} \\
&\stackrel{\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}}{=} \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{1}{(2 \cosh\left(\frac{x}{2L}\right))^2} \\
&= \frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{1}{4 \cosh^2\left(\frac{x}{2L}\right)} = \frac{dc(\rho_0(x))}{dx} \\
\Rightarrow T &= -\frac{1}{\frac{dc(\rho_0(x_0))}{dx_0}} = -\frac{1}{\frac{v_0 \cdot (2\rho_L - 2\rho_R)}{\rho_{\max} \cdot L} \cdot \frac{1}{4 \cosh^2\left(\frac{x_0}{2L}\right)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2L\rho_{\max}}{v_0 \cdot (\rho_R - \rho_L)} \cdot \cosh^2\left(\frac{x_0}{2L}\right)$$

Betrachte die Funktion $\cosh^2(x) = \frac{(\exp(x) + \exp(-x))^2}{4}$ und ihr Verhalten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d \cosh^2(x)}{dx} &= \frac{2(\exp(x) + \exp(-x))(\exp(x) - \exp(-x))}{4} \\ &= \frac{\exp(2x) - \exp(-2x)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\exp(2x) - \exp(-2x)}{2} \iff \exp(-2x) = \exp(2x) \iff -2x = 2x$$

$$\iff x = 0$$

$$\frac{d^2 \cosh^2(x)}{dx^2} = \frac{2\exp(2x) + 2\exp(-2x)}{2} > 0$$

$\Rightarrow \cosh^2(x)$ hat ein Minimum bei $x = 0$

$$\cosh^2(0) = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{2L} = 0 \iff x_0 = 0$$

$$\Rightarrow T_{\min} = \frac{2L\rho_{\max}}{v_0 \cdot (\rho_R - \rho_L)} \text{ bei } x_0 = 0$$

Mit $t \rightarrow T_{\min}$ wird $\frac{\partial \rho(c(\rho_0(0))t, t)}{\partial x}$ immer größer bis bei $t = T_{\min}$ $\frac{\partial \rho(c(\rho_0(0))t, t)}{\partial x} = \infty$ ist. Abbildung 10 zeigt die Lösung für $t \leq T_{\min}$. Abbildung 11 zeigt die Lösung für $t > T_{\min}$ auch wenn diese Lösung nicht gültig ist, aufgrund der Mehrdeutigkeit. Drei Charakteristika treffen sich bei einem Punkt. An den Grenzen treffen sich zwei benachbarte Charakteristika. Der mehrwertige Bereich lässt sich somit durch T einschränken. Zudem legt die unendliche Steigung bei $c(\rho_0(0))T_{\min}$ nahe, dass sich eine Schockwelle gebildet hat. Mathematisch bedeutet eine Schockwelle eine Unstetigkeitsstelle in einer oder mehreren Variablen. In unserem Fall ist die betroffene Variable die Dichte ρ . Wo tritt nun diese Schockwelle auf? Da unsere zugrunde liegende Gleichung $\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + c(\rho(x, t)) \cdot \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0$ den Erhalt der Autos darstellt, sollten wir die Unstetigkeitsstelle so zu dem Dichte Profil hinzufügen, dass gleiche Flächen, in dem Sinne Flächen mit gleicher Automasse, abgeschnitten werden. Abbildung 12 zeigt dies beispielhaft. Die Regel hinter dem Vorgehen nennt man die Regel

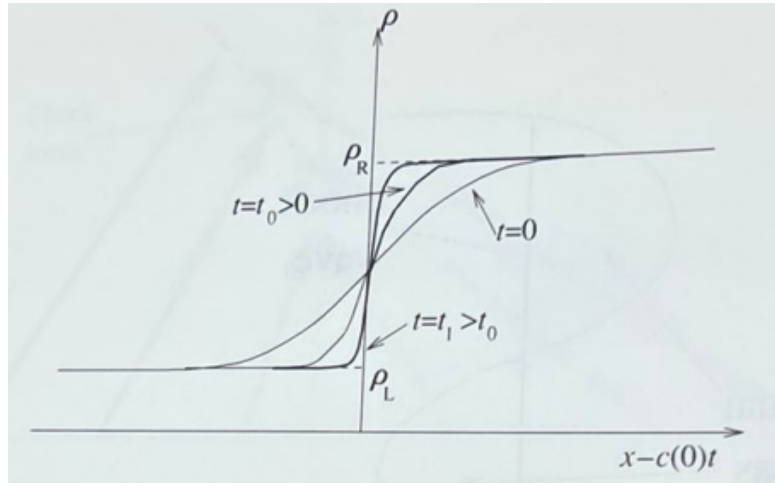


Abbildung 10.: Die Lösung für $t \leq T_{\min}$ für das Anfangswertproblem mit $\rho_L < \rho_R$.

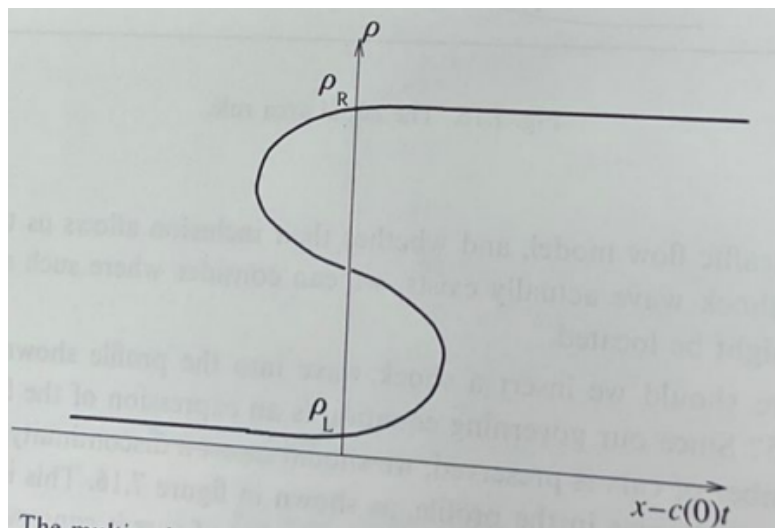


Abbildung 11.: Die mehrwertige Lösung für $t > T_{\min}$ für das Anfangswertproblem mit $\rho_L < \rho_R$.

der gleichen Flächen, wodurch die Anzahl der Autos erhalten wird. Dadurch erfüllt die Lösung auch die Integralform der Erhaltungsgleichung für Autos. Da dort keine x Ableitungen vorkommen, stellt die Unstetigkeit kein Problem

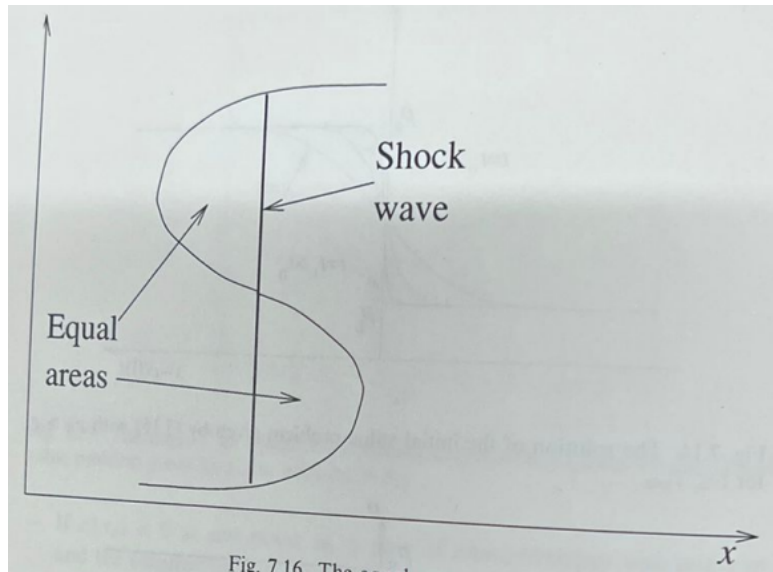


Abbildung 12.: Die Regel der gleichen Flächen

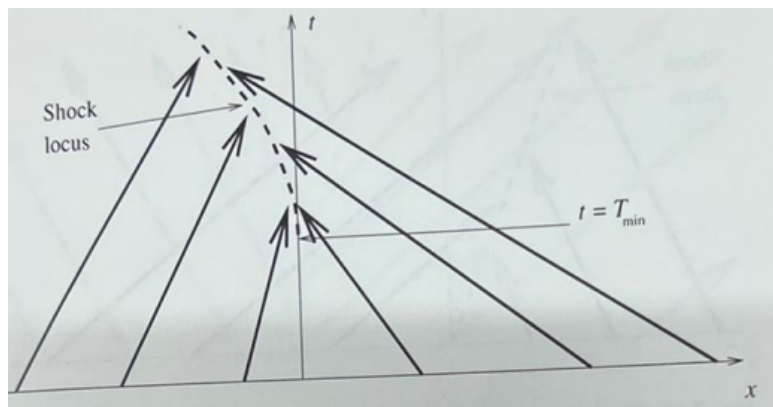


Abbildung 13.: Die Charakteristika und die Schockkurve für das Anfangswertproblem mit $\rho_L < \rho_R$.

dar. Den ganzen Prozess nennt man shock fitting. Abbildung 13 zeigt die Charakteristika und die Schockkurve. Wenn man sich zur Veranschaulichung die Situation mit $\rho_R = \rho_{\max}$ vorstellt, kann man sich Autos an einer roten Ampel vorstellen, wo andere Autos von hinten zur Ampel fahren. Diese Autos stoppen ab bis sie zum Stillstand kommen. Diese entstehende Schlange an Autos

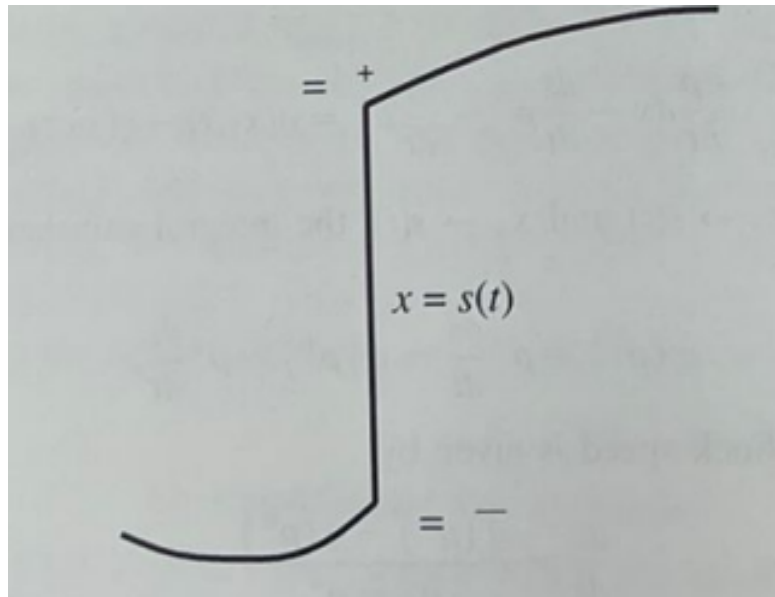


Abbildung 14.: Eine Schockwelle.

verlängert sich durch eine Schockwelle, die sich in $-x$ -Richtung ausbreitet.
Abbildung 14 zeigt, wie eine Schockwelle aussieht.

5. Die Schockgeschwindigkeit

Stellen wir uns eine Schockwelle vor, deren Position durch $x = s(t)$ gegeben ist. Dabei ist die Dichte $\rho = \rho^-$ bei $x = s^-$ und $\rho = \rho^+$ bei $x = s^+$. Nun nutzen wir die Erhaltungsgleichung von Autos in Integralform, um die Geschwindigkeit des Schocks zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{x_1}^{s(t)} + \int_{s(t)}^{x_2} \right) \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t) \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{x_1}^{s(t)} \rho(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_2} \rho(x, t) dx \right) = q(x_1, t) - q(x_2, t) \\
 & \xLeftrightarrow{\text{Leibniz-Regel}} \int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx \\
 & + \underbrace{\rho(s(t), t)}_{=\rho^-} \frac{ds(t)}{dt} - \underbrace{\rho(x_1, t) \frac{dx_1}{dt}}_{=0} - \underbrace{\rho(s(t), t)}_{=\rho^+} \frac{ds(t)}{dt} + \underbrace{\rho(x_2, t) \frac{dx_2}{dt}}_{=0} \\
 & = q(x_1, t) - q(x_2, t) \\
 \Leftrightarrow & \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx + \rho^- \frac{ds(t)}{dt} - \rho^+ \frac{ds(t)}{dt} = q(x_1, t) - q(x_2, t) \\
 & \xrightarrow{x_1 \rightarrow s(t) \text{ und } x_2 \rightarrow s(t)} \rho^- \frac{ds(t)}{dt} - \rho^+ \frac{ds(t)}{dt} = q(\rho^-) - q(\rho^+) \\
 \Leftrightarrow & \frac{ds(t)}{dt} = \frac{q(\rho^-) - q(\rho^+)}{\rho^- - \rho^+}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Schockgeschwindigkeit für den Fall $q(\rho) = \rho v(\rho)$ gleich $\frac{v(\rho^-) + v(\rho^+)}{2}$ ist.

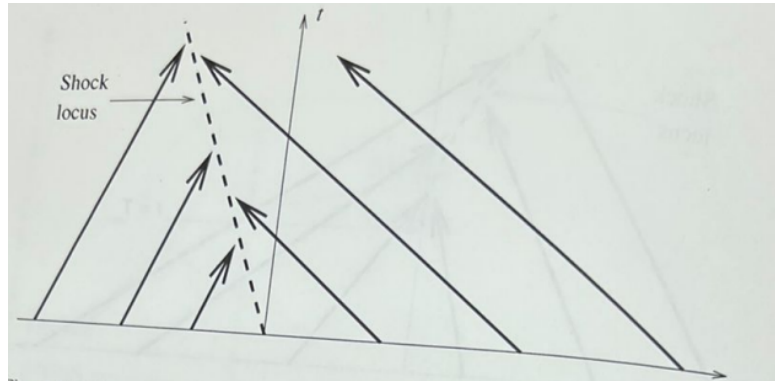


Abbildung 15.: Die Charakteristika und die Schockkurve für das Riemann Problem mit $\rho_L < \rho_R$ und x als horizontale Achse.

Nun betrachten wir den Fall $\rho_L < \rho_R$ mit $L \rightarrow 0$.

$$\implies T_{\min} \rightarrow 0$$

Das bedeutet, dass sich eine Schockwelle schon bei $t = 0$ formt und die Anfangsbedingungen bei $x_0 = 0$ eine Schockwelle sind und diese auch zeitlich fortbesteht. Die Schockgeschwindigkeit ist dabei konstant. Da alle Charakteristika in der Schockkurve aussterben, entsteht z.B. auch kein Expansionsfächer. Abbildung 15 zeigt die Charakteristika und die Schockkurve. Zudem zeigt Abbildung 16 das Riemann Problem mit $\rho_L > \rho_R$, wobei eine Schockkurve mit berücksichtigt wurde. Diesen Fall kann man physikalisch aber ausschließen.

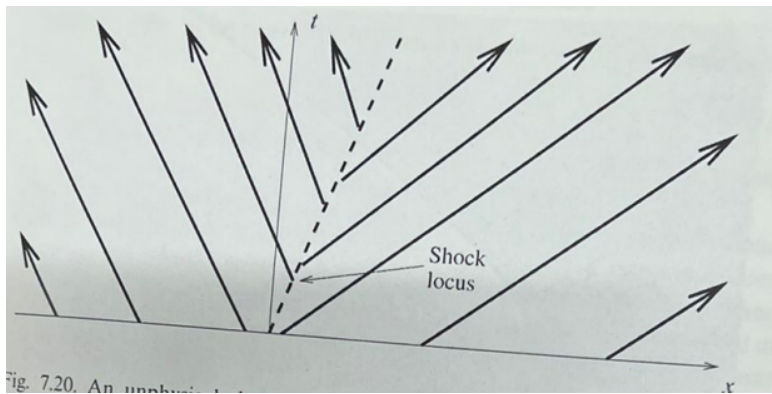


Abbildung 16.: Eine unphysikalische Schockkurven Lösung für das Riemann Problem mit $\rho_L > \rho_R$.

A. Literaturverzeichnis

- [1] J. Billingham and A.C. King: Wave Motion, Cambridge University Press (2000).
- [2] Wikipedia Artikel über die Leibniz-Regel für Parameterintegrale, https://de.wikipedia.org/wiki/Leibnizregel_für_Parameterintegrale.

B. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel (dazu zählen auch KI-basierte Anwendungen oder Werkzeuge*) benutzt habe. Sämtliche wörtlichen oder sinngemäßen Übernahmen und Zitate sind kenntlich gemacht und nachgewiesen. Ich versichere, dass ich keine Hilfsmittel verwendet habe, deren Nutzung die Prüferin oder der Prüfer explizit ausgeschlossen hat. KI-basierte Anwendungen und Werkzeuge wurden in Absprache mit dem Betreuer / der Betreuerin eingesetzt. Im Anhang „Nutzung KI-Tools“ habe ich die verwendeten KI-Tools dokumentiert. Mit Abgabe der vorliegenden Leistung übernehme ich die Verantwortung für das eingereichte Gesamtprodukt. Ich verantworte damit auch jegliche KI-generierten Inhalte, die ich in meine Arbeit übernommen habe. Die Richtigkeit übernommener (KI-generierter) Aussagen und Inhalte habe ich nach bestem Wissen und Gewissen geprüft. Ich habe die Arbeit nicht zum Erwerb eines anderen Leistungsnachweises in gleicher oder ähnlicher Form eingereicht. Mir ist bekannt, dass ein Verstoß gegen die genannten Punkte prüfungsrechtliche Konsequenzen hat und insbesondere dazu führen kann, dass die Studien- und Prüfungsleistung als mit „nicht bestanden“ bewertet wird. Die Einschreibung kann für bis zu zwei Jahre widerrufen werden, wenn Studierende zweimal oder häufiger bei Prüfungsleistungen täuschen (§ 69 Abs. 4 und 5 HochSchG).

Mainz, den 10.12.2024