

Nonlinear shallow water waves

Marius Nickels

June 2026

1 Teil 1: Nonlinear Shallow Water Waves

Voraussetzungen

- horizontale Wellenlänge $\gg$ Wassertiefe
- hydrostatischer Druck, $p = \rho \cdot g \cdot (h - y)$
- keine vertikale Beschleunigung
- horizontale Fluidgeschwindigkeit ist unabhängig von der Wassertiefe
- Die Wasserhöhe zum Zeitpunkt $t = 0$ sei konstant

Beispiel

Ein Tsunami, welcher ausgelöst wird von einem Seebeben, hat Wellenlängen im Bereich ~ 100 km. Die Wassertiefe ist im Ozean mit ~ 4 km zwar absolut betrachtet hoch, aber im Verhältnis zur Wellenlänge klein!

Die Flachwassergleichungen

mit horizontaler Fluidgeschwindigkeit u und vertikaler Wassertiefe h lauten:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (8.2)$$

Wir führen für die lokale Wellengeschwindigkeit die neue Variable $c = \sqrt{gh}$ ein. Uns interessieren nur Lösungen im Bereich $h > 0$, weswegen wir $c > 0$ annehmen. Somit erhalten von der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= h'(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial t}, \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= h'(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (8.1) und (8.2) liefert

$$\begin{aligned}\frac{c}{g}(2\frac{\partial c}{\partial t} + 2u\frac{\partial c}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial x}) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + 2c\frac{\partial c}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Wegen $c > 0$ bekommen wir

$$2\frac{\partial c}{\partial t} + 2u\frac{\partial c}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + 2c\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (8.4)$$

$$\stackrel{(8.3)\pm(8.4)}{\implies} \frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c)\frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = 0 \quad (8.5)$$

Wie wir sehen gibt es zwei Familien von Charakteristiken $C_{\pm}$, welche jeweils die Steigung $\frac{d}{dt}X_{\pm} = u \pm c$ haben und die Riemann-Invarianten $R_{\pm} = u \pm 2c$ transportieren. Wir rechnen nur die C_+ nach: Sei $X(t)$ eine Kurve, betrachte die Änderung von $u + 2c$ entlang $X(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u(X(t), t) + 2c(X(t), t)) &= \frac{\partial}{\partial t}u(X(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(X(t), t) \cdot \frac{dX}{dt} \\ &\quad + 2\frac{\partial}{\partial t}c(X(t), t) + 2\frac{\partial}{\partial x}c(X(t), t) \cdot \frac{dX}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(u(X(t), t) + 2c(X(t), t)) + \frac{dX}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(u(X(t), t) + 2c(X(t), t)) \\ &= 0 \\ &\quad \text{mit } \frac{dX}{dt} = u + c\end{aligned}$$

Jetzt wollen wir uns in zwei Beispielen zwei Phänomene anschauen, welche bei unseren hyperbolischen Gleichungen auftreten können: ein Rarefaction-fan und ein Schock.

Beispiel 1: Das Dam-break-problem

Wir betrachten ein halbumendliches Wasserbecken der Höhe h_0 , in $x < 0$ in Ruhe liegend, welches bei $x = 0$ von einem Damm zurückgehalten wird. Was passiert, wenn wir den Damm zum Zeitpunkt $t = 0$ entfernen bzw. er bricht? Wie entwickelt sich die Wasserhöhe h in Abhängigkeit von x und t ?

Um dieses Problem zu lösen, werden wir (8.1) und (8.2) mit den Anfangsbedingungen

$$h(x, 0) = h_0 H(-x), u(x, 0) = 0$$

$$\text{wobei } H(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

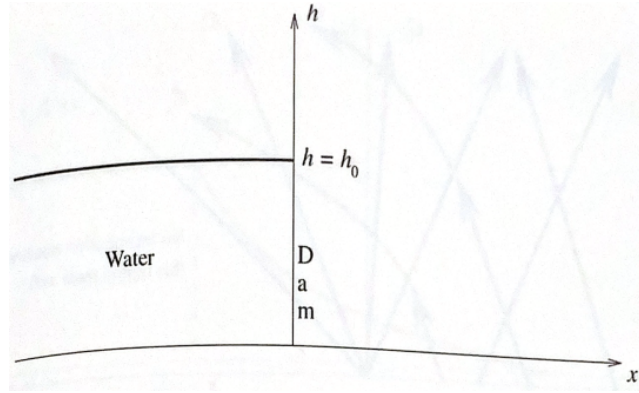


Abbildung 1: Setting des Dam-break-problem

lösen. Wir starten damit die Riemann-Invarianten von Charakteristiken zu bestimmen die im ungestörten Anfangsgebiet starten. Es sei also $t = 0$ und $x < 0$: Dann erhalten wir

$$R_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gh} = 0 \pm 2\sqrt{gh_0} = \pm 2c_0$$

Wenn wir uns jetzt beliebige Schnittpunkte (insbesondere in $t > 0$) von solchen Charakteristiken anschauen, können wir $R_+ \pm R_-$ berechnen und sehen, dass in diesem Schnittgebiet $u = 0, h = h_0$ gelten muss. Diese Region hat die Information des Dammbruchs also noch nicht mitbekommen! Für $C_{\pm}$ folgt

$$\frac{d}{dt}X_{\pm} = u \pm \sqrt{gh} = 0 \pm \sqrt{gh_0} = \pm c_0$$

Die Charakteristiken sind Geraden mit Steigung $\pm c_0$ und das Schnittgebiet muss daher in $x < -c_0 t$ liegen.

Was uns jetzt noch fehlt sind die $C_{\pm}$ in $x > -c_0 t$, wir bemerken, dass die C_+ mit positiver Steigung in dieses Gebiet hineinlaufen und nehmen daher an, dass sie diese Region komplett ausfüllen. Später wird sich zeigen, dass diese Annahme gerechtfertigt war.

Wir möchten jetzt die C_- Charakteristiken in $x > -c_0 t$ bestimmen und betrachten dazu wieder Schnittpunkte von C_- und C_+ :

$$\begin{aligned} R_+ &= u + 2\sqrt{gh} = 2c_0 \\ R_- &= u - 2\sqrt{gh} = K \end{aligned}$$

mit einer Konstante K entlang C_- . Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} u &= c_0 + \frac{K}{2} \\ h &= \frac{1}{g} \left(\frac{2c_0 - K}{4} \right)^2, \end{aligned}$$

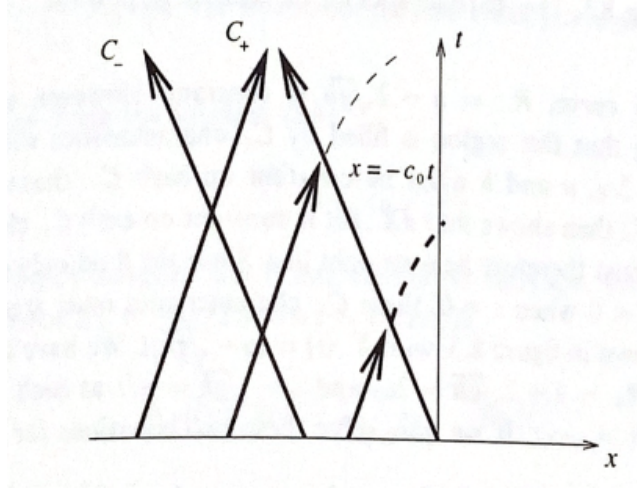


Abbildung 2: Die Charakteristiken im noch ungestörten Gebiet

u und h sind also konstant entlang C_- -Charakteristiken und aus $\frac{d}{dt}X_- = u - \sqrt{gh}$ folgt, dass die C_- wieder Geraden sind. Da für $t = 0$ in $x > 0$ kein Wasser ist, folgen wir, dass die C_- alle im Ursprung starten:

$$X_-(t) = (u - \sqrt{gh})t$$

Wir wollen als nächstes argumentieren, dass durch jeden Punkt in $-c_0 t < x < 2c_0 t$ eine C_- geht. Wir stellen zunächst fest, dass wegen

$$R_+ = u + 2c = 2c_0 \Rightarrow u = 2c_0 - 2c \Rightarrow \frac{d}{dt}X_-(c) = 2c_0 - 3c$$

$\frac{d}{dt}X_-$ eine stetige Funktion in c ist und $c \in [0, c_0]$ (weil $h \in [0, h_0]$). Daher liegt $\frac{d}{dt}X_-$ in $[\frac{d}{dt}X_-(0), \frac{d}{dt}X_-(c_0)] = [-c_0, 2c_0]$ und alle Steigungen dieses Intervalls werden angenommen. Es entsteht ein Fächer der C_- -Charakteristiken bzw. ein Rarefaction-fan!

Aus den C_- und der Riemann-Invariante der C_+ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= u - \sqrt{gh} \\ u + 2\sqrt{gh} &= 2c_0 \end{aligned}$$

Umstellen und gegenseitiges Einsetzen löst dieses Gleichungssystem und gibt uns die Lösung im Rarefaction-fan:

$$h = \frac{h_0}{9} \left(2 - \frac{x}{c_0 t}\right)^2, u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t}\right) \quad (8.6)$$

Die Wellenfront befindet sich bei $x = 2c_0 t$, denn $h(2c_0 t, t) = 0$, und keine Charakteristik erreicht die Region $x > 2c_0 t$. Die Information des Dammbruchs

breitet sich nach hinten mit nur der Hälfte ($-c_0$) der Geschwindigkeit der Wellenfront ($2c_0$) nach vorne aus.

Abschließend wollen wir noch die C_+ Charakteristiken bestimmen und setzen (8.6) in die Charakteristiksteigung von C_+ ein:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X_+ &= u + \sqrt{gh} = \frac{2}{3}\left(c_0 + \frac{X_+}{t}\right) + \sqrt{g\frac{h_0}{9}} \cdot \left(2 - \frac{X_+}{c_0 t}\right) = \frac{2}{3}\left(c_0 + \frac{X_+}{t}\right) + \frac{c_0}{3}\left(2 - \frac{X_+}{c_0 t}\right) \\ &= \frac{4}{3}c_0 + \frac{X_+}{3t}\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung müssen wir lösen, mit der Anfangsbedingung, dass die C_+ den linken Rand des Fächers zum Zeitpunkt t_0 erreichen:

$$X_+(t_0) = -c_0 t_0, \quad t_0 \text{ bestimmt durch } -x_0 + c_0 t_0 = -c_0 t_0, \quad x_0 > 0 \quad (2)$$

Diese lineare DGL erster Ordnung hat die Lösung

$$X_+(t) = 2c_0 t - 3\left(\frac{1}{2}x_0\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (c_0 t)^{\frac{1}{3}}$$

Wir beobachten, dass für $x_0 \ll 0$, $X_+ \approx 2c_0 t$ was unsere Annahme vom Anfang verifiziert.

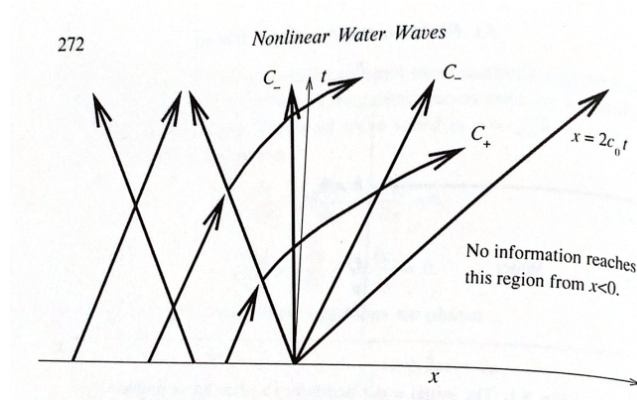


Abbildung 3: Die Charakteristiken des Dam-break-problem

Wir kennen jetzt die endgültige Lösung des Dam-break-problem:

$$\begin{cases} h = h_0, u = 0, & \text{für } x \leq -c_0 t \\ h = \frac{h_0}{9} \left(2 - \frac{x}{c_0 t}\right)^2, u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t}\right), & \text{für } -c_0 t \leq x \leq 2c_0 t \\ h = 0, u = 0, & \text{für } x > 2c_0 t \end{cases}$$

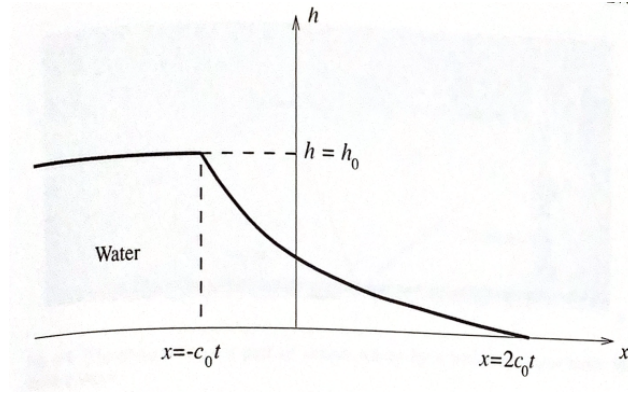


Abbildung 4: Die Lösung des Dam-break-problem

Wir bemerken abschließend, dass in diesem Problem die gesamte Information nur von einer Charakteristikenfamilie, den C_- , transportiert wurde. So eine Lösung nennt man *einfache Welle*. Das einfachste Beispiel wäre die Lösung der Transportgleichung, dort wird die Information (die Anfangsbedingung) von der einzig existenten Charakteristikenfamilie transportiert. Mit $R_+ = u + 2c = 2c_0$ überall, können wir $u = 2c_0 - 2c$ in (8.5) einsetzen. Der $u + \dots$ Fall ist 0 weil $\frac{\partial}{\partial t} 2c_0 = \frac{\partial}{\partial x} 2c_0 = 0$ und für den $u - \dots$ Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(2c_0 - 4c) + (2c_0 - 3c) \frac{\partial}{\partial x}(2c_0 - 4c) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + (2c_0 - 3c) \frac{\partial c}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Bzw. mit $h > 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3c) \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + (2c_0 - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Hier kann man auch sofort erkennen dass nur C_- mit Geschwindigkeit $\frac{d}{dt} X_- = 2c_0 - 3c = u - c$ die Information transportieren, und weil h konstant entlang dieser Charakteristik bleibt ist diese Geschwindigkeit konstant entlang C_- . Man sieht also wieder, dass die C_- Geraden sind!

Beispiel 2: Das moving-wall-problem

Jetzt wollen wir uns ein Beispiel für einen Schock auf der Wasseroberfläche anschauen. Betrachte dafür wieder ein halbunendliches, ruhendes Wasserbecken in $x > 0$. Es wird bei $x = 0$ von einer Wand zurückgehalten, welche sich ab $t = 0$ mit Geschwindigkeit V in das Becken hineinbewegt. Wie verhält sich die Wasserhöhe in $x > Vt$ für $t > 0$?

Wir müssen wieder (8.1) und (8.2) mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= h_0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \text{für } x > 0 \\ u &= V, \quad \text{bei } x = Vt \end{aligned}$$

lösen. Die Charakteristiken und zugehörigen Riemann-Invarianten bleiben die gleichen, wir betrachten C_+ , die bei $t = 0$ im Wasser (in $x > 0$) starten:

$$\frac{d}{dt}X_+ = u + \sqrt{gh} = c_0$$

Solche, die (für $t > 0$) an der Wand $x = Vt$ starten erfüllen

$$\frac{d}{dt}X_+ = u + \sqrt{gh} = V + c_0 > c_0.$$

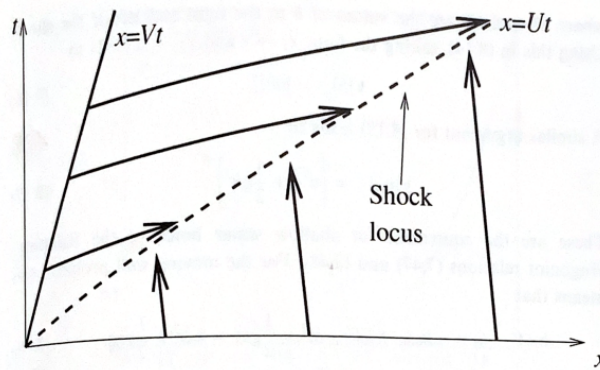


Abbildung 5: Die C_+ im moving-wall-problem

Charakteristiken derselben Familie schneiden sich also unmittelbar nach $t > 0$, wir behandeln diese Mehrdeutigkeit der Riemann-Invariante bzw. der Lösung, wie schon im 9. Vortrag gesehen, mit einer Unstetigkeitsstelle, einem Schock.

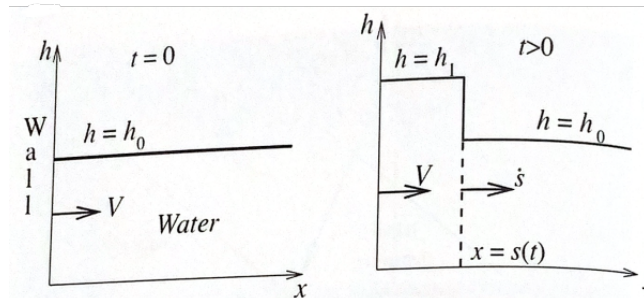


Abbildung 6: Die Lösung des moving-wall-problem

Um dies aber physikalisch sinnvoll zu tun (sog. *shock-fitting*) müssen wir die Massen- und Impulserhaltung berücksichtigen. Energieerhaltung können wir an einer Unstetigkeit nicht erwarten, wir werden vielmehr die Energiedissipation dort bestimmen.

Massenerhaltung für shallow-water

Im Allgemeinen ist die Masse M in einem Volumen V gegeben durch

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dV = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

Im Flachwasser sei der Boden bei $z = b(x, y)$, die freie Wasseroberfläche bei $z = \eta(x, y, t)$. Die Wassertiefe ist also $h(x, y, t) = \eta(x, y, t) - b(x, y)$

$$\Rightarrow M = \iint_A \left(\int_{b(x,y)}^{\eta(x,y,t)} \rho(x, y, z, t) dz \right)$$

Das Wasser sei inkompressibel, d.h. $\rho \equiv \rho_0$ und wir sind im eindimensionalen Fall, wählen also in y -Richtung die konstante Breite 1:

$$\begin{aligned} M &= \iint_A \rho_0 \cdot (\eta - b) dx dy = \iint_A \rho_0 \cdot h dx dy \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \rho_0 \cdot h(x, t) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx. \end{aligned}$$

Wir betrachten ein Intervall $[x_1, x_2]$ in dem sich der Schock befinde, die Massenerhaltungsgleichung lautet dann

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h dx + [\rho h u]_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (8.7)$$

Für die Impulserhaltung bemerken wir, dass eine Änderung des Impulses der Nettoimpulsfluss, plus die Druckkräfte welche am Rand auf das Volumen wirken, ist:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx = - [\rho u^2 h]_{x_1}^{x_2} + \int_0^{h(x_1)} p(x_1, y, t) dy - \int_0^{h(x_2)} p(x_2, y, t) dy$$

Mit der Annahme des hydrostatischen Drucks, $p = \rho g(h - y)$, folgt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho h u dx + \left[\rho u^2 h + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (8.8)$$

Wir teilen die Dichte ρ aus (8.7) und (8.8) raus und gehen wie in Vortrag 9 vor, um die Schockgeschwindigkeit und Schockhöhe herauszufinden: Wir teilen das Integral von x_1 bis x_2 auf in einen Teil vor dem Schock, x_1 bis $s(t)$, und einen Teil nach dem Schock, $s(t)$ bis x_2 :

1. (8.7):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [hu]_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} h \, dx + \int_{s(t)}^{x_2} h \, dx \right) + [hu]_{x_1}^{x_2} \\
&\stackrel{\text{Leibnizregel}}{=} \int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx + \dot{s} h_+(s(t), t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx - \dot{s} h_-(s(t), t) + [hu]_{x_1}^{x_2} \\
&\stackrel{x_1, x_2 \rightarrow s(t)}{=} \dot{s} (h_+ - h_-) + [hu]_+^- = \dot{s} [h]_-^+ + [hu]_+^- \\
&\iff \dot{s} [h]_-^+ = [hu]_+^- \tag{8.9}
\end{aligned}$$

2. (8.8): Die analoge Rechnung führt auf

$$\dot{s} [uh]_-^+ = \left[u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right]_-^+ \tag{8.10}$$

(8.9) und (8.10) sind die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen* für die eindimensionalen Flachwassergleichungen. Speziell für unser Beispiel:

- $h_+ = h_1$, die Wasserhöhe beim bzw. hinter dem Schock
- $u_+ = V$
- $h_- = h_0$
- $u_- = 0$

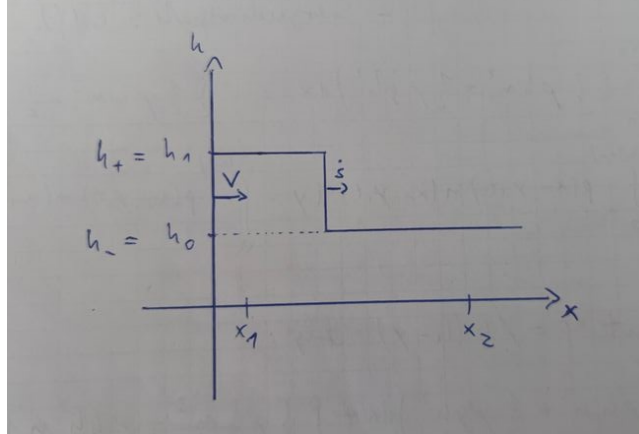


Abbildung 7: Unser Schocksetting

(8.9) wird damit zu

$$h_1(V - \dot{s}) = -\dot{s}h_0 \tag{1}$$

(8.10) liefert:

$$\begin{aligned}
\dot{s}h_1V &= V^2h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2 - \frac{1}{2}gh_0^2 \\
\iff \dot{s}h_1(V - \dot{s}) + \dot{s}^2h_1 &= (V - \dot{s})^2h_1 + 2(V - \dot{s})\dot{s}h_1 + \dot{s}^2h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2 - \frac{1}{2}gh_0^2 \\
\iff (V - \dot{s})^2h_1 + \dot{s}(V - \dot{s})h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2 &= \frac{1}{2}gh_0^2
\end{aligned}$$

mit der ersten RH-Bed. (1) folgt :

$$\iff (V - \dot{s})^2h_1 + \frac{1}{2}gh_1^2 = \dot{s}^2h_0 + \frac{1}{2}gh_0^2 \quad (2)$$

Wir haben jetzt zwei Gleichungen (1), (2) für zwei unbekannte $\dot{s}, h_1$. Wir sehen in (1), dass $\dot{s} = \frac{Vh_1}{h_1 - h_0}$ und setzen es in (2) ein:

$$\begin{aligned}
&h_1(V - \dot{s})(V - \dot{s}) - h_0\dot{s}^2 + \frac{1}{2}gh_1^2 = \frac{1}{2}gh_0^2 \\
\iff &-\dot{s}h_0(V - \dot{s}) - h_0\dot{s}^2 = \frac{1}{2}g(h_0^2 - h_1^2) \\
\iff &-Vh_0 \cdot \frac{Vh_1}{h_1 - h_0} = \frac{1}{2}g(h_0^2 - h_1^2) \\
\iff &\frac{2h_0h_1V^2}{h_1 - h_0} = g(h_1^2 - h_0^2) \\
\iff &\frac{2h_0h_1V^2}{h_1 - h_0} = g(h_1 - h_0)^2(h_1 + h_0), \quad H := \frac{h_1}{h_0} \\
\iff &2Hh_0^2V^2 = gh_0^2(H - 1)^2 \cdot h_0(H + 1) \\
\iff &\frac{2HV^2}{gh_0} = (H - 1)^2 \cdot (H + 1), \quad F_r := \frac{V}{\sqrt{gh_0}} \\
\iff &(H - 1)^2 \cdot (H + 1) = 2F_r^2H \quad (3)
\end{aligned}$$

mit der *Froude Zahl* F_r , welche das Verhältnis zwischen Wandgeschwindigkeit und Wellenausbreitungsgeschwindigkeit bzw. Gravitationskräften angibt. Da (3) mehrere Lösungen H besitzt muss man die physikalisch sinnvolle auswählen, ein Plot beider Seiten zeigt Lösungen $H > 1$ und $H < 1$:

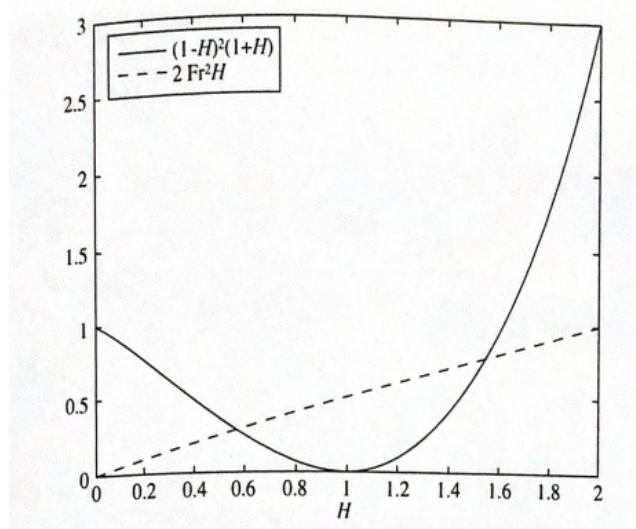


Abbildung 8: Beide Seiten der Gleichung (3) mit $F_r = \frac{1}{2}$

In unserem Beispiel ist es sinnvoll die Lösung $H > 1$ zu wählen, denn (1) gibt $\dot{s} = \frac{VH}{H-1}$, und die Schockgeschwindigkeit sollte positiv sein! Im Allgemeinen ist es der Fakt, dass Energie am Schock dissipiert, welcher die physikalisch sinnvolle Lösung aus (3) wählt. Für unser Beispiel haben wir also die Schockkurve $s(t)$ gefunden:

$$s(t) = \frac{Vh_1}{h_1 - h_0}t > Vt$$

Zudem können wir in (3) beobachten, dass für $F_r \ll 1$, die Wand im Vergleich zur Ausbreitungsgeschwindigkeit also langsam ins Wasser bewegt wird, $H \approx 1$, bzw. $h_1 \approx h_0$. Der Schockhöhe ist also nicht sehr groß, was intuitiv Sinn ergibt. Umgekehrt folgt für eine „schnelle“ Wand $F_r \gg 1$, $H \gg 1$, die Schockhöhe ist also groß.

Energiedissipation

Zum Schluss wollen wir uns noch die Energiedissipation L am Schock, für unser moving-wall-problem, anschauen. Die Energiedichte im Wasser setzt sich zusammen aus kinetischer und hydrostatisch potenzieller Energie: $\frac{1}{2}\rho hu^2 + \frac{1}{2}\rho gh^2$. Betrachten wir jetzt ein Längenstück des Wassers, in dem sich ein Schock befindet, ist die Änderung der Energie darin gegeben durch den Nettofluss derselben plus die Arbeit der hydrostatischen Kräfte an den Rändern des Stücks minus

die Energiedissipation $L(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 dx &= - \left[\frac{1}{2} \rho h u^3 + \frac{1}{2} \rho g h^2 u \right]_{x_1}^{x_2} \\ &+ \int_0^{h(x_1)} p(x_1, y, t) u(x_1, y, t) dy - \int_0^{h(x_2)} p(x_2, y, t) u(x_2, y, t) dy - L \end{aligned}$$

Mit hydrostatischem Druck $p = \rho g(h - y)$ folgt wieder:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 dx + \left[\frac{1}{2} \rho h u^3 + \rho g h^2 u \right]_{x_1}^{x_2} + L = 0$$

Dieselbe Vorgehensweise wie bei (8.7) und (8.8) führt zu

$$L(t) = \dot{s} \left[\frac{1}{2} \rho h u^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right]_+^+ - \left[\frac{1}{2} \rho h u^3 + \frac{1}{2} \rho g h^2 u \right]_-^+$$

Setzen wir erneut $u_+ = V$, $u_- = 0$, $h_+ = h_1$, $h_- = h_0$ ein und gruppieren nach h_1 und h_0 :

$$L(t) = h_1 \rho \left(\frac{1}{2} \dot{s} V^2 + \frac{1}{2} g h_1 \dot{s} - \frac{1}{2} V^3 - h_1 g V \right) + \rho h_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{s} g h_0 \right)$$

mit $V = (V - \dot{s}) + \dot{s}$ fahren wir fort:

$$\begin{aligned} &= h_1 \rho \left(\frac{1}{2} \dot{s} (V - \dot{s})^2 + \dot{s}^2 (V - \dot{s}) + \frac{1}{2} \dot{s}^3 + \frac{1}{2} g h_1 \dot{s} - \frac{1}{2} (V - \dot{s})^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \dot{s} (V - \dot{s})^2 - \frac{3}{2} \dot{s}^2 (V - \dot{s}) - \frac{1}{2} \dot{s}^3 - h_1 g (V - \dot{s}) - h_1 g \dot{s} \right) \\ &\quad + \rho h_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{s} g h_0 \right) \\ &= h_1 \rho \left(-\frac{1}{2} (V - \dot{s})^3 - \dot{s} (V - \dot{s})^2 + \left(-\frac{1}{2} \dot{s}^2 - h_1 g \right) \cdot (V - \dot{s}) - \frac{1}{2} g h_1 \dot{s} \right) \\ &\quad + \rho h_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{s} g h_0 \right) \\ &= -\rho \left(\frac{1}{2} h_1 (V - \dot{s})^3 + (V - \dot{s}) g h_1^2 - \frac{1}{2} \dot{s}^3 h_0 + h_1 \dot{s} (V - \dot{s})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g h_1^2 \dot{s} + \frac{1}{2} g h_0^2 \dot{s} \right) \\ &= -\rho \left(\frac{1}{2} h_1 (V - \dot{s})^3 + (V - \dot{s}) g h_1^2 - \frac{1}{2} \dot{s}^3 h_0 + \dot{s}^3 h_0 + \frac{1}{2} \dot{s} g h_0^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \dot{s} g h_0^2 \right) \end{aligned}$$

Wobei wir in den letzten beiden Schritten jeweils (1) und (2) verwendet haben. Final erhalten wir:

$$L = -\rho \left(\frac{1}{2} (V - \dot{s})^3 h_1 + (V - \dot{s}) g h_1^2 + \frac{1}{2} \dot{s}^3 h_0 + \dot{s} g h_0^2 \right)$$

Bemerkung

Im Buch erhält besitzt L ein positives Vorzeichen, also $L = \rho \left(\frac{1}{2}(V - \dot{s})^3 h_1 + (V - \dot{s})gh_1^2 + \frac{1}{2}\dot{s}^3 h_0 + \dot{s}gh_0^2 \right)$. Es ist aber eine reine Definitionssache wie man die Schockrichtung bzw. die Klammer $[\dots]^\pm$ festlegt. Wir haben uns für diese in Abbildung (7) entschieden, mit welchem die Energiedissipation ein negatives Vorzeichen hat.

(1) und (3) und weitere längliche Umformungen liefern schließlich

$$L = -\frac{1}{4}\rho g \dot{s} \frac{(h_1 - h_0)^3}{h_1}$$

Wir erkennen, dass an einem starken Schock, charakterisiert durch eine große Schockhöhe bzw. großes H , (kubisch) mehr Energie dissipiert, als bei einem schwächeren.

2 The Effect of Nonlinearity on Deep Water Gravity Waves: Stokes Expansion

2.1 Einleitung

Die lineare Theorie von Wasserwellen basiert auf der Annahme kleiner Amplituden im Vergleich zur Wellenlänge. Für reale Wasserwellen ist diese Annahme jedoch nur näherungsweise erfüllt. Eine schwache Nichtlinearität führt zu einer Änderung der Wellenform und der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Effekte werden durch die Stokes-Expansion beschrieben.

Wir betrachten eine zweidimensionale, periodische Welle auf einer inkompressiblen, reibungsfreien Flüssigkeit mit unendlicher Tiefe. Die Strömung wird als rotationsfrei angenommen, sodass ein Geschwindigkeitspotential ϕ existiert:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi.$$

Damit folgt aus der Inkompressibilität die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{8.11}$$

Die freie Oberfläche sei durch

$$y = \eta(x, t)$$

gegeben. Auf dieser Oberfläche gelten die kinematische und dynamische Randbedingung.

Die kinematische Bedingung lautet

$$\eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_y, \quad (8.12)$$

während aus der Bernoulli-Gleichung die dynamische Bedingung folgt:

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g\eta = 0. \quad (8.13)$$

Für kleine Amplituden können die nichtlinearen Terme vernachlässigt werden. Bis hierher haben wir alles schon in Kapitel 4 kennengelernt, jetzt möchten wir aber die Nichtlinearität nicht weiter vernachlässigen und betrachten deshalb asymptotische Entwicklungen der Größen in Potenzen des kleinen Parameters ϵ . Wir transformieren unser Koordinatensystem so, dass es mit der Welle mit Geschwindigkeit c in x -Richtung mitläuft und werden so die Zeitableitung von ϕ los. Die vertikale Achse wählen wir so, dass die freie Wasseroberfläche, bei ruhendem Wasser, bei $y = 0$ ist.

2.2 Störungsentwicklung

Die kleine Größe der Nichtlinearität wird durch die dimensionslose Steilheit

$$\epsilon = \frac{H}{\lambda}$$

charakterisiert, wobei H die Wellenhöhe (doppelte Amplitude), und λ die Wellenlänge ist. Für vom Wind erzeugte Wellen ist $\epsilon \approx 0.05$. Falls es stürmt, ist $\epsilon \approx 0.13$. Unser Ansatz hält stand bis etwa $\epsilon \approx 0.14$, dann ist eine rotationsfreie Strömung nicht mehr wahrscheinlich. Wir betrachten also nur schwache Nichtlinearität. Wir entdimensionalisieren die Variablen wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\lambda}, \quad \bar{\phi} = \frac{\phi}{cH}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{H},$$

Mit diesen Größen transformiert sich das nichtlineare Randwertproblem (8.11), (8.12), (8.13), welches wir schon im Vortrag über lineare Wasserwellen gesehen haben, zu:

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 0, \quad \text{für } \bar{y} < \epsilon \bar{\eta} \quad (8.14)$$

$$\frac{1}{2}\epsilon (\bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \bar{\phi}_{\bar{y}}^2) + K\bar{\eta} = B, \quad \text{bei } \bar{y} = \epsilon \bar{\eta} \quad (8.15)$$

$$\bar{\phi}_{\bar{y}} = \epsilon \bar{\phi}_{\bar{x}} \bar{\eta}_{\bar{x}}, \quad \text{bei } \bar{y} = \epsilon \bar{\eta} \quad (8.16)$$

$$\bar{\phi} \sim \frac{\bar{x}}{\epsilon}, \quad \text{für } \bar{y} \rightarrow -\infty, \quad (8.17)$$

weil wir im bewegten KOS sind

mit $K = \frac{\lambda g}{c^2}$ und der Bernoulli-Konstante B , welche die Energie im Fluid repräsentiert. Die Lösung muss periodisch mit Periode eins sein, wegen Entdimensionalisierung, und die Definition der Wellenhöhe als Differenz zwischen

Wellenberg und Wellental liefert

$$\bar{\eta}(0) - \bar{\eta}\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

wenn wir den Ursprung des Koordinatensystems in das Wellental legen. Die führende Ordnung des entdimensionalisierten Geschwindigkeitspotenzials $\bar{\phi}$ muss $\frac{\bar{x}}{\epsilon}$ sein, denn im bewegten KOS gilt $\phi \sim cx$ ($\Rightarrow \bar{\phi} = \frac{\phi}{cH} \sim \frac{cx}{cH} = \frac{\bar{x}\lambda}{H} = \frac{\bar{x}}{\epsilon}$). Aus (8.15) folgt, dass $B \sim \frac{1}{2\epsilon}$, denn $K\bar{\eta} \sim 1$

Wir lassen der Einfachheit wegen die Striche weg und entwickeln die unbekannten Größen deshalb wie folgt asymptotisch:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{x}{\epsilon} + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \\ \eta &= \eta_0 + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + O(\epsilon^3) \\ B &= \frac{1}{2\epsilon} + B_0 + \epsilon B_1 + O(\epsilon^2) \\ K &= K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}$$

Die Entwicklung wird in die Randbedingungen eingesetzt und nach Potenzen von ϵ geordnet:

2.3 Führende Ordnung: lineare Lösung

1. (8.14):

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^2 \phi = \nabla^2 \left(\frac{x}{\epsilon} + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \right) \\ &= \nabla^2 \phi_0 + \epsilon \nabla^2 \phi_1 + \dots ,\end{aligned}$$

$$y < \epsilon\eta = \epsilon(\eta_0 + \epsilon\eta_1 + O(\epsilon^2)) = 0 + O(\epsilon)$$

In führender Ordnung gilt also $\nabla^2 \phi_0 = 0$ für $y < 0$

2. (8.15):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\epsilon(\phi_x^2 + \phi_y^2) + K\eta = B \\
\iff & \frac{1}{2}\epsilon \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\epsilon} + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \right) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\epsilon} + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \right) \right)^2 \right) \\
& + (K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + O(\epsilon^3)) \cdot (\eta_0 + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + O(\epsilon^3)) = \frac{1}{2\epsilon} + B_0 + \epsilon B_1 + O(\epsilon^2) \\
\iff & \frac{1}{2}\epsilon \left(\left(\frac{1}{\epsilon} + \phi_{0x} + \epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi_{2x} + O(\epsilon^3) \right)^2 + (\phi_{0y} + \epsilon\phi_{1y} + \epsilon^2\phi_{2y} + O(\epsilon^3))^2 \right) \\
& + (K_0 + \epsilon K_1 + \epsilon^2 K_2 + O(\epsilon^3)) \cdot (\eta_0 + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + O(\epsilon^3)) = \frac{1}{2\epsilon} + B_0 + \epsilon B_1 + O(\epsilon^2) \\
\iff & \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon}\phi_{0x} + \phi_{1x} + \dots + \phi_{0y}^2 + \dots \right) + K_0\eta_0 + \dots = \frac{1}{2\epsilon} + B_0 + \dots \\
\iff & \frac{1}{2\epsilon} + \phi_{0x} + O(\epsilon) + K_0\eta_0 + O(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon} + B_0 + O(\epsilon) \\
\iff & \phi_{0x} + K_0\eta_0 + O(\epsilon) = B_0 + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

In führender Ordnung gilt also $\phi_{0x} + K_0\eta_0 = B_0$ bei $y = 0$.

3. (8.16):

$$\begin{aligned}
& \phi_{0y} + \epsilon\phi_{1y} + \epsilon^2\phi_{2y} + O(\epsilon^3) = \epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} + \phi_{0x} + \epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi_{2x} + O(\epsilon^3) \right) \cdot (\eta_{0x} + \epsilon\eta_{1x} + \epsilon^2\eta_{2x} + O(\epsilon^3)) \\
\iff & \phi_{0y} + O(\epsilon) = \eta_{0x} + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

In führender Ordnung gilt also $\phi_{0y} = \eta_{0x}$ bei $y = 0$.

4. (8.17):

$$\begin{aligned}
& \phi \sim \frac{x}{\epsilon} \\
\iff & \frac{x}{\epsilon} + \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \sim \frac{x}{\epsilon} \\
\iff & \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + O(\epsilon^3) \sim 0
\end{aligned}$$

Es gilt also $\phi_0 \rightarrow 0$ für $y \rightarrow -\infty$.

Zusammenfassend:

$$\nabla^2\phi_0 = 0, \text{ für } y < 0 \quad (8.18)$$

$$\phi_{0x} + K_0\eta_0 = B_0, \text{ bei } y = 0 \quad (8.19)$$

$$\phi_{0y} = \eta_{0x}, \text{ bei } y = 0 \quad (8.20)$$

$$\phi_0 \rightarrow 0, \text{ für } y \rightarrow -\infty$$

$$\eta_0(0) - \eta_0\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \quad (8.21)$$

Eine harmonische Lösung von (8.18) mit Periode eins, welche für $y \rightarrow -\infty$ gegen 0 geht lautet

$$\phi_0 = Ae^{2\pi y} \sin 2\pi x$$

(8.19) und (8.20) liefern

$$\begin{aligned}\phi_{0xx} + K_0\eta_{0x} &= 0 \\ \iff \phi_{0xx} + K_0\phi_{0y} &= 0 \\ \iff -4\pi^2 Ae^{2\pi y} \sin 2\pi x + K_0 2\pi Ae^{2\pi y} \sin 2\pi x &= 0 \\ \Rightarrow K_0 &= 2\pi\end{aligned}$$

(8.20) gibt wiederum

$$\begin{aligned}\eta_{0x} &= 2\pi A \sin 2\pi x \\ \Rightarrow \eta_0 &= -A \cos 2\pi x + C\end{aligned}$$

Mit (8.19) erhält man dann $C = \frac{B_0}{2\pi}$. (8.21) liefert $A = \frac{1}{2}$.
Zusammengefasst:

$$\phi_0 = \frac{1}{2}e^{2\pi y} \sin 2\pi x, \quad \eta_0 = \frac{B_0}{2\pi} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x, \quad K_0 = 2\pi$$

Das ist einfach unsere linearisierte Lösung aus Kapitel 4!

2.4 Erste Ordnung der Stokes-Entwicklung

Zur Bestimmung der ersten nichtlinearen Korrektur werden die asymptotischen Entwicklungen für das Geschwindigkeitspotential Φ , die freie Oberfläche η sowie die Konstanten K und B wieder in die Randbedingungen eingesetzt. Da diese Randbedingungen auf der freien Oberfläche

$$y = \epsilon\eta(x)$$

gelten, müssen sie zunächst mithilfe einer Taylorentwicklung um die feste Ebene $y = 0$ entwickelt werden. Dadurch werden sämtliche Randbedingungen auf die feste Referenzfläche $y = 0$ zurückgeführt, wodurch sich das Randwertproblem wesentlich einfacher lösen lässt.

Nach Einsetzen der Entwicklungen und Sortieren nach Potenzen von ϵ erhält man das Randwertproblem erster Ordnung. Dabei treten Terme mit der Grundfrequenz $\sin(2\pi x)$ bzw. $\cos(2\pi x)$ auf. Diese würden zu sogenannten *säkularen Termen* führen, welche mit der Ortskoordinate wachsen und damit die Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung verletzen würden. Um diese Resonanzeffekte zu vermeiden, werden die Konstanten so gewählt, dass die entsprechenden Terme verschwinden. Daraus folgt

$$B_0 = 0, \quad K_1 = 0.$$

Als Lösung der ersten Ordnung erhält man damit

$$\Phi_1 = 0$$

sowie die Korrektur der freien Oberfläche

$$\eta_1 = \frac{B_1}{2\pi} + \frac{\pi}{4} \cos(4\pi x).$$

2.5 Zweite Ordnung und Korrektur der Wellengeschwindigkeit

Eine vollständige Berechnung der zweiten Ordnung ist nicht erforderlich. Stattdessen wird erneut die Bedingung verwendet, dass keine säkularen Terme auftreten dürfen. Aus den Randbedingungen zweiter Ordnung lassen sich dadurch unmittelbar die noch unbekannten Konstanten bestimmen:

$$K_2 = -2\pi^3, \quad B_1 = -\frac{5}{8}\pi^2.$$

Damit ergibt sich die Stokes-Entwicklung bis zur ersten nichtlinearen Korrektur zu

$$\Phi = \frac{x}{\epsilon} - \frac{1}{2}e^{2\pi y} \sin(2\pi x) + O(\epsilon^2),$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + \epsilon \left(\frac{\pi}{4} \cos(4\pi x) - \frac{5\pi}{16} \right) + O(\epsilon^2), \quad (8.22)$$

sowie

$$K^{-1} = \frac{c^2}{g\lambda} = \frac{1}{2\pi} (1 + \pi^2 \epsilon^2) + O(\epsilon^3).$$

Die Stokes-Entwicklung liefert damit die erste nichtlineare Korrektur der linearen Wellentheorie. Insbesondere zeigt sich, dass sich Wellen endlicher Amplitude mit einer etwas größeren Geschwindigkeit ausbreiten als von der linearen Theorie vorhergesagt. Außerdem enthält die freie Oberfläche zusätzlich zur Grundwelle eine zweite Harmonische. Dadurch werden die Wellenberge steiler und die Wellentäler flacher – ein charakteristisches Merkmal von Stokes-Wellen. Die Bahnkurven der Fluidteilchen sind außerdem nicht geschlossen, was einen schwachen Massetransport bzw. *Drift* impliziert.

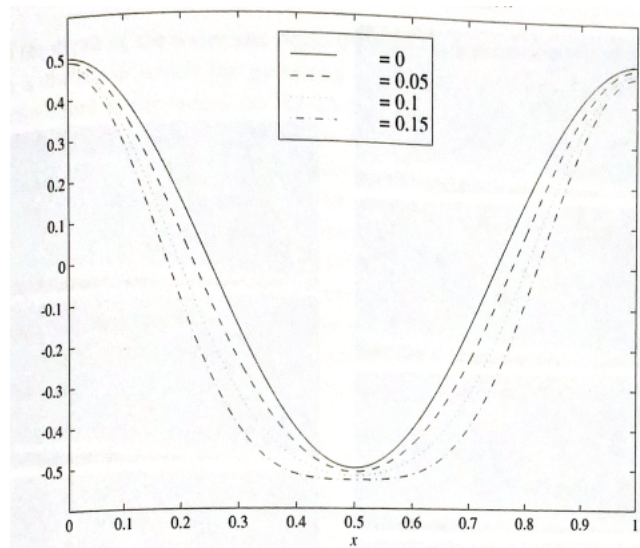


Abbildung 9: Die schwach nichtlineare Lösung (8.22) für verschiedene ϵ

Literatur

- [1] J. Billingham and A.C. King *Wave motion*, Cambridge University Press, 2012.